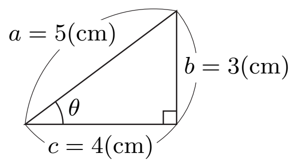
1　三角比

1.1　鋭角の三角比・相互関係

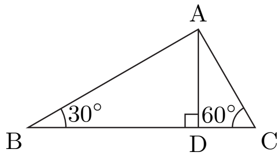
問題

98 次の問いに答えよ。

(1) 右図のような直角三角形がある。θ の正弦，余弦，正接を求めよ。



(2) 右図の三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に下した垂線 AD の長さが 10cm のとき，辺 BC の長さを求めよ。ただし答えは有理化すること。



（広島国際学院大）

99 (1) 平坦な場所に垂直に立った木がある。この木の頂点を A，根もとを B とする。このとき木の根もとから 10m 離れた地点 O において，$\angle$AOB の大きさを測定したら $37°$ であった。木の高さを求めよ。ただし，$\sin 37° = 0.602$，$\cos 37° = 0.799$，$\tan 37° = 0.754$ として計算せよ。（湘南工科大）

(2) 地上 $x$km の位置に静止している人工衛星から地球を見ると，地球の半径が $\boxed{}$ km の円板に見える。ただし，地球は半径が R km の球とする。

（関西大）

100 (1) θ が鋭角で $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ ならば，$\sin\theta = \boxed{}$ である。

（八戸工業大）

(2) 角 θ が鋭角で $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\tan\theta = \boxed{}$ である。

（八戸工業大）

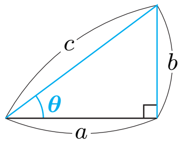
(3) $0° < x < 90°$ かつ $\tan x = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin x = \boxed{}$，$\cos x = \boxed{}$ である。

（東京工芸大）

チェック・チェック

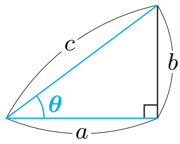
98 (1) 三角比の定義を確認しておきましょう。

正弦 (*sine*)



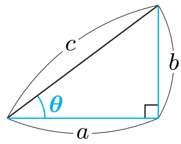
$\sin\theta = \dfrac{b}{c}$

余弦 (*cosine*)



$\cos\theta = \dfrac{a}{c}$

正接 (*tangent*)



$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

(2) BC $=$ BD $+$ DC として，2 つの直角三角形 ABD，ACD の中で BD，DC の長さを考えます。

99 三角測量の問題です。

(1) 直角三角形 AOB を図示してみましょう。

(2) 人工衛星と地球の中心を通る直線を含む平面による切り口を図示してみましょう。

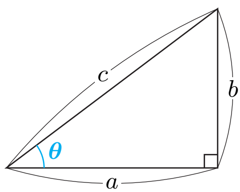
100 与えられた条件から直角三角形を考えて定義に戻ってもよいですし，三角形の相互関係を用いて考えてもよいでしょう。

では，三角比の相互関係を確認しておきましょう。右下図の直角三角形において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立ち

- $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$
- $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$
- $1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{a}\right)^2$



と変形されるから

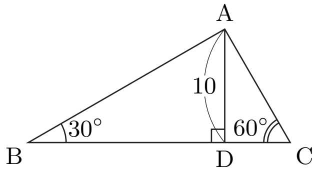
- $\boldsymbol{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$
- $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
- $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

という関係が成り立ちます。

解答・解説

98 (1) 正弦 $\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{3}{5}}$，余弦 $\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{4}{5}}$，正接 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{3}{4}}$

(2) $\tan 30^\circ = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$ より



$$\mathrm{BD} = \frac{\mathrm{AD}}{\tan 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 10\sqrt{3}$$

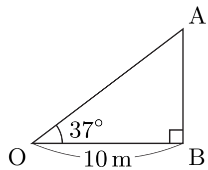
また，$\tan 60^\circ = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}$ より

$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{AD}}{\tan 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

したがって

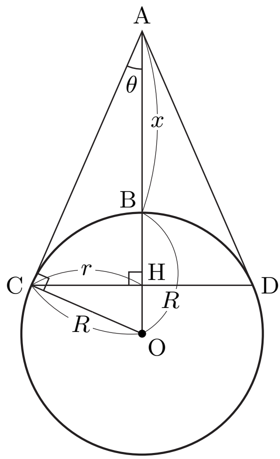
$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + \mathrm{DC} = 10\sqrt{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{40\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{cm})}$$

99 (1) $\tan 37^\circ = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}$ であるから，木の高さ AB は



$$\mathrm{AB} = \mathrm{OB} \cdot \tan 37^\circ = 10 \cdot 0.754 = \boldsymbol{7.54\ (\mathrm{m})}$$

(2) 地球の中心 O と人工衛星 A を通る直線を含む平面による切り口を考える。切り口における線分 OA および円板と地球の交点をそれぞれ B および C，D とおき，OA と CD の交点を H とおく。



$\angle\mathrm{OAC} = \theta$，$\mathrm{CH} = r$ とおくと

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}} = \frac{R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{x^2 + 2xR}}$$

また，$\triangle\mathrm{OCH} \backsim \triangle\mathrm{OAC}$ より

$$\angle\mathrm{OCH} = \angle\mathrm{OAC} = \theta$$

である。このとき

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{CH}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

$$\therefore\quad \frac{R}{\sqrt{x^2 + 2xR}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

両辺を 2 乗して

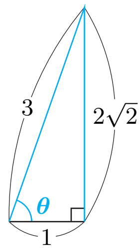
$$\frac{R^2}{x^2+2xR}=\frac{R^2-r^2}{r^2}$$

$$R^2r^2=(R^2-r^2)(x^2+2xR)$$

$$(x^2+2xR+R^2)r^2=R^2(x^2+2xR) \qquad \therefore \quad r=\boldsymbol{\frac{R\sqrt{x^2+2xR}}{x+R}}\ \textbf{(km)}$$

100 (1) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$



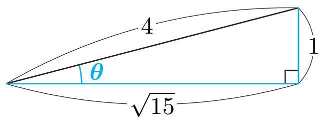
別解 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

θ が鋭角より $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{15}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{15}}$$



別解 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$

θ が鋭角より $\cos\theta>0$ であるから

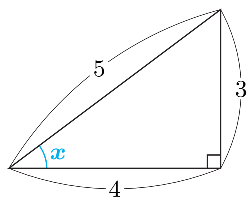
$$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \therefore \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

あるいは，θ は鋭角より $\tan\theta>0$ であるから

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{16}{15}-1=\frac{1}{15} \qquad \therefore \quad \tan\theta=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

(3) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\boldsymbol{\sin x=\frac{3}{5},\quad \cos x=\frac{4}{5}}$$



別解 $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$ より

$$\cos^2 x=\frac{16}{25}$$

$0^\circ<x<90^\circ$ なので $\cos x>0$ $\qquad \therefore \quad \cos x=\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ より

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

1.2　鈍角の三角比・相互関係

問題

101 (1) θ が第 2 象限の角で $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta = \boxed{}$，$\tan\theta = \boxed{}$ である。（足利工業大）

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で，$\cos\theta = -\dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。（長崎総合科学大）

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\tan\theta = -2\sqrt{2}$ とする。このとき，$\sin\theta = \boxed{}$，$\cos\theta = \boxed{}$ である。（八戸工業大）

チェック・チェック

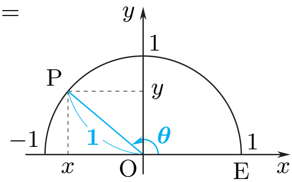
101 原点を中心とする半径 1 の円（単位円）で，$\angle\mathrm{POE} = \theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x,\quad \sin\theta = \frac{y}{1} = y,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である。とくに θ が鈍角（$90^\circ < \theta < 180^\circ$）のとき

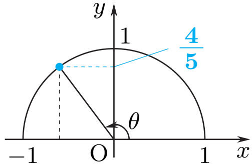
$$\cos\theta < 0,\quad \sin\theta > 0,\quad \tan\theta < 0$$

である。



解答・解説

101 (1) $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ より



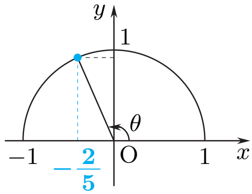
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

θ が第 2 象限の角より $\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{3}{5}}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{4}{3}}}$$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{2}{5}$ より



$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{21}{25}} = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{5}}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{21}}{2}}}$$

(3) $$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (-2\sqrt{2})^2 = 9 \qquad \therefore \quad \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\tan\theta < 0$ より θ は第 2 象限の角となり，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{9}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{3}}}$$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

1.3　90°±θ，180°±θ の三角比

問題

102 $\tan(90^\circ-\theta)=7$ のとき，$\tan\theta=$ $\boxed{}$ である。　（八戸工業大）

103 $(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ)^2+(\sin 70^\circ+\cos 70^\circ)^2=$ $\boxed{}$　（愛知学院大）

104 $\sin 160^\circ\ \cos 70^\circ+\cos 20^\circ\ \sin 70^\circ$ の値を求めよ。　（東北芸工大）

チェック・チェック

102 **余角の公式**です。

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

103 角を 20° に統一することを考えましょう。

$$\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$$
$$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$$

ですね。

104 **補角の公式**も使えるようにしましょう。

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

補角，余角の公式を使って，角の統一をはかります。

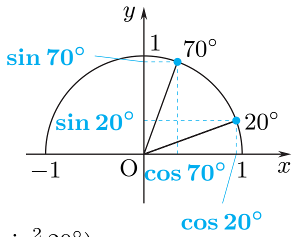
解答・解説

102 $\tan(90^\circ-\theta)=7$ より

$$\frac{1}{\tan\theta}=7 \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{\tan\theta=\frac{1}{7}}}$$

103

$$\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$$
$$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$$

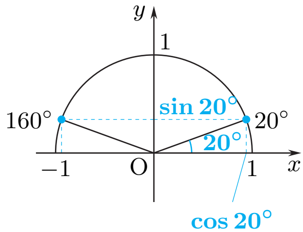


より

$$\begin{aligned}
&(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ)^2+(\sin 70^\circ+\cos 70^\circ)^2\\
&=(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ)^2+(\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)^2\\
&=(\sin^2 20^\circ-2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ+\cos^2 20^\circ)\\
&\qquad+(\cos^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ+\sin^2 20^\circ)\\
&=2(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)=\underline{\mathbf{2}}
\end{aligned}$$

104

$$\sin 160^\circ=\sin(180^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$$
$$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$$
$$\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$$



より

$$\begin{aligned}
&\sin 160^\circ\cos 70^\circ+\cos 20^\circ\sin 70^\circ\\
&=\sin 20^\circ\sin 20^\circ+\cos 20^\circ\cos 20^\circ\\
&=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=\underline{\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

別解 $\sin 160^\circ=\sin(90^\circ+70^\circ)=\cos 70^\circ$，$\cos 20^\circ=\cos(90^\circ-70^\circ)=\sin 70^\circ$ として，角を 70° に統一して計算してもよい。

1.4　大小比較

問題

105 $\tan 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\cos 40^\circ$，$\sin 135^\circ$ を値の小さい方から順に並べると $\boxed{}$ である。（北海道工業大）

106 $\cos 25^\circ$，$\cos 50^\circ$，$\sin 50^\circ$ のうち値が一番大きいのは $\boxed{}$ であり，値が一番小さいのは $\boxed{}$ である。（北見工業大）

チェック・チェック

105 $\tan 30^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\sin 135^\circ$ の値は覚えていなければなりません。$\cos 40^\circ$ の値は知らないので，既知の値と比較して評価します。

　たとえば，$\cos 30^\circ > \cos 40^\circ > \cos 45^\circ$ です。

106 $\cos 25^\circ$，$\cos 50^\circ$，$\sin 50^\circ$ と，すべての角が第 1 象限にあります。**関数の統一**を考えて，すべてを cos で表してみましょう。

解答・解説

105 $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

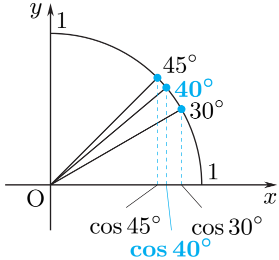
$$\sin 30^\circ < \tan 30^\circ < \sin 135^\circ$$

また，$\cos 30^\circ > \cos 40^\circ > \cos 45^\circ$ より

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos 40^\circ > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，値の小さい順に並べると

<u>$\mathbf{\sin 30^\circ < \tan 30^\circ < \sin 135^\circ < \cos 40^\circ}$</u>



106 $\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき θ の値が小さいほど $\cos\theta$ の値は大きくなるので

$$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ < \cos 25^\circ$$

であり

値が一番大きいのは <u>$\mathbf{\cos 25^\circ}$</u>，値が一番小さいのは <u>$\mathbf{\cos 50^\circ}$</u>

1.5　式の値

問題

107 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ のとき

$$\sin\theta\cos\theta=\boxed{},\quad \sin^4\theta+\cos^4\theta=\boxed{}$$

である。（北海道工業大）

108 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ （ただし $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ ）であるとき

$$\sin\theta=\boxed{}$$

である。（拓殖大）

109 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\sin\theta\cos\theta=\boxed{}$$

であり，$\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\boxed{}$ である。（足利工業大）

110 $0^\circ\leqq A\leqq180^\circ$ のとき $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{10}{3}$ が成り立つとする。
このとき

$\sin A+\cos A$ の値は $\boxed{}$

であり

$\sin A-\cos A$ の値は $\boxed{}$

である。（日本工業大）

チェック・チェック

107 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると $\sin\theta\cos\theta$ が得られます。
$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式なので，**基本対称式の $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ で表す**ことができます。

108 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ と合わせて考えてみましょう。$\sin\theta$，$\cos\theta$ についての連立方程式を解くことになります。

また，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の和と積が得られれば，解と係数の関係（数学 II）も利用できます。

109 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗してみましょう。$\sin\theta\cos\theta$ が得られます。

$$\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

ですから，これも $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式です。

110 $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}$ も $\sin A+\cos A$ も $\sin A$ と $\cos A$ の対称式ですが，$\sin A-\cos A$ は対称式ではありません。しかし，**2 乗すると対称式** です。

また，$\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{10}{3}$ から $\sin A\cos A$ の値を得ることができます。
$\sin^2A+\cos^2A=1$ と合わせて，$(\sin A\pm\cos A)^2$ の値を求めましょう。
$\sin A\pm\cos A$ の符号をおさえることも大切です。

解答・解説

107 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=2 \qquad \therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

また

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

108 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より

$$\cos\theta=\frac{1}{3}-\sin\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に $\cos\theta=\dfrac{1}{3}-\sin\theta$ を代入し，**$\cos\theta$ を消去**すると

$$\sin^2\theta+\left(\frac{1}{3}-\sin\theta\right)^2=1 \qquad \therefore\quad 2\sin^2\theta-\frac{2}{3}\sin\theta-\frac{8}{9}=0$$

$\sin\theta=t$ とおくと

$$9t^2-3t-4=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{3\pm\sqrt{3^2+4\cdot9\cdot4}}{18}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$0\leqq t\leqq1$ であるから

$$\sin\theta=t=\underline{\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{17}}{6}}}$$

別解 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2=1$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \qquad \therefore\quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

よって，解と係数の関係（数学II）より，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-\frac{1}{3}t-\frac{4}{9}=0 \qquad \therefore\quad 9t^2-3t-4=0$$

以下，同じ。

109 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\underline{\boldsymbol{-\frac{3}{8}}}$$

また

$$\begin{aligned}\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}&=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-2\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\\&=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-2=\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\right)^2-2\\&=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2-2=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-2=\underline{\boldsymbol{\frac{46}{9}}}\end{aligned}$$

110 $$\begin{aligned}\tan A+\frac{1}{\tan A}&=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos A\sin A}\\&=\frac{1}{\sin A\cos A}\end{aligned}$$

よって $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{10}{3}$ より

$$\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{10}{3}\qquad\therefore\quad \sin A\cos A=\frac{3}{10}$$

このとき

$$\begin{aligned}(\sin A+\cos A)^2&=\sin^2A+2\sin A\cos A+\cos^2A\\&=1+2\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{5}\\(\sin A-\cos A)^2&=\sin^2A-2\sin A\cos A+\cos^2A\\&=1-2\cdot\frac{3}{10}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$0^\circ\leqq A\leqq180^\circ$ かつ $\sin A\cos A=\dfrac{3}{10}>0$ なので

$$\sin A>0,\quad \cos A>0$$

すなわち，$\sin A+\cos A>0$ なので

$$\sin A+\cos A=\sqrt{\frac{8}{5}}=\underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{5}}}$$

$$\sin A-\cos A=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\underline{\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{10}}{5}}}$$

1.6　方程式

問題

111 以下の方程式をみたす x を求めよ。ただし，$90^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。

$6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$　（専修大）

112 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ をみたす θ の値を求めよ。
ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。　（滋賀大，手塚山大）

113 $0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ の条件で，次の方程式をみたす θ は $\boxed{}$ である。

$\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 1$　（立教大　改）

114 連立方程式 $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{2} \\ \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。
ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq y \leqq 180^\circ$ とする。
(1) $\sin x + \cos y$ の値を求めよ。　(2) x を求めよ。　(3) y を求めよ。
（産能大）

チェック・チェック

111 $\cos x$ の方程式なので，$\cos x = t$ と置換すれば，t の 2 次方程式です。なお，置換したときには，**置き換えた t の値の範囲に注意**しましょう。

112 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表されていますから，どちらか一方に統一します。本問は

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

と置換することによって，**$\sin\theta$ のみの方程式**となります。

113 上と同じように，$\sin\theta$ または $\cos\theta$ で表そうとすると $\sin\theta\cos\theta$ の項がじゃまですね。両辺を $\cos^2\theta$ でわってみましょう。**$\tan\theta$ のみの方程式**となります。ただし，わるときには（分母）$\neq 0$ のチェックを忘れないようにしましょう。

114 $\cos^2 x + \sin^2 y$ は **$\sin x$ と $\cos y$ で表す**ことができます。この変形により，本問の連立方程式は $\sin x$ と $\cos y$ についての対称式となりますね。

解答・解説

111 $90^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq \cos x \leqq 0$ であり，$\boldsymbol{\cos x = t}$ **とおく**と

$$6t^2 + t - 1 = 0 \qquad (3t-1)(2t+1) = 0$$

$-1 \leqq t \leqq 0$ より

$$t = \cos x = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x = 120^\circ}}$$

112 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ より

$$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$$

$$\therefore \quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots①$$

$\boldsymbol{\sin\theta = t}$ **とおく**と，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから

$$0 < \sin\theta \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 < t \leqq 1$$

したがって，① より

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \qquad (2t-1)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = \sin\theta = \frac{1}{2},\ 1$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ}}$

113 $\cos\theta = 0$ のときは成立しないので，$\cos\theta \fallingdotseq 0$ であり，与式の両辺を $\cos^2\theta$ でわると

$$1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1 + \sqrt{3}\tan\theta = 1 + \tan^2\theta \qquad \therefore \quad \tan\theta = 0,\ \sqrt{3}$$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{\theta = 0^\circ,\ 60^\circ}}$

114 (1) $\cos^2 x + \sin^2 y = (1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 y)$

なので，$\cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{2}$ を変形すると

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}$$

したがって

$$(\sin x + \cos y)^2 = \sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x \cos y = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

ここで，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ なので，$\sin x \geqq 0$ であり，$\sin x \cos y > 0$ であることから，$\sin x > 0$，$\cos y > 0$ となり

$$\sin x + \cos y > 0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\sin x + \cos y = 1}}$$

(2) $\sin x + \cos y = 1$ かつ $\sin x \cos y = \dfrac{1}{4}$ なので

$$\frac{1}{4} = \sin x(1 - \sin x)$$

$$\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} = 0 \qquad \therefore \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{x = 30^\circ,\ 150^\circ}}$

(3) (2) より　$\cos y = 1 - \sin x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq y \leqq 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{y = 60^\circ}}$

1.7 不等式

問題

115 $0^\circ < \theta < 135^\circ$ のとき，不等式 $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 > 0$ を解け。

（龍谷大）

116 不等式 $2\cos^2\theta + \sin\theta - 2 < 0$ を解け。
ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 （川村学園女子大）

117 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす θ の値は $\boxed{}$，$\tan\theta > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす θ の範囲は $\boxed{} < \theta < \boxed{}$ である。 （西日本工業大）

チェック・チェック

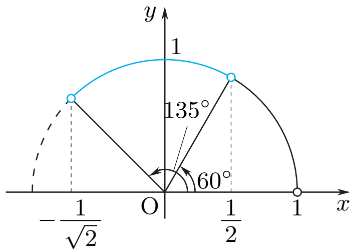
115 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を利用すると，$\cos\theta$ のみで表せます。

116 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用すると，$\sin\theta$ のみで表せます。

117 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は 30° です。$\tan\theta > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ の範囲は単位円の中で確認しましょう。

解答・解説

115 $2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1>0$



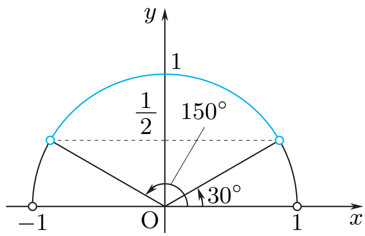
$\cos\theta = t$ とおくと，与式は

$$2t^2+t-1<0$$
$$(2t-1)(t+1)<0$$
$$-1<t<\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad -1<\cos\theta<\frac{1}{2}$$

ここで，$0^\circ<\theta<135^\circ$ より

$\underline{\boldsymbol{60^\circ<\theta<135^\circ}}$

116 $2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2<0$

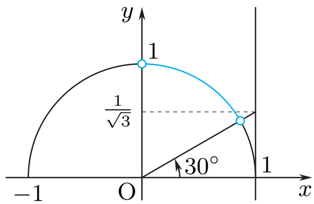


$$2\sin^2\theta-\sin\theta>0$$
$$\sin\theta(2\sin\theta-1)>0$$
$$\therefore\quad \sin\theta<0,\ \sin\theta>\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より

$\underline{\boldsymbol{30^\circ<\theta<150^\circ}}$

117 $0^\circ\leqq\theta<90^\circ$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より



$\underline{\boldsymbol{\theta=30^\circ}}$

次に，$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす θ は $\theta=30^\circ$ なので，

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ において，$\tan\theta>\frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす θ の範囲は

$\underline{\boldsymbol{30^\circ<\theta<90^\circ}}$

1.8　最大・最小

問題

118 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\cos^2\theta + 2\sin\theta + \sin^2\theta$ の最大値は $\boxed{}$，また最小値は $\boxed{}$ である。（東海大）

119 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ で $f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ の最小値を求める。次の $\boxed{}$ に当てはまる数や式をかけ。

サインとコサインの関係より

$$\boxed{} + \boxed{} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割ることによって

$$\boxed{} + \boxed{} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。与式より

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

サインとコサインの関係 ① を使って

$$f(\theta) = 2 + \boxed{} + \tan^2\theta \quad \cdots\cdots ③$$

②の関係を使って

$$f(\theta) = 1 + \cos^2\theta + \boxed{} = \left(\cos\theta - \boxed{}\right)^2 + 3$$

よって，$\boxed{} = 1$ のとき，すなわち，$\theta = \boxed{}$ のとき，$f(\theta)$ の最小値は $\boxed{}$ となる。（徳島文理大）

120 関数 $f(x) = \sin^2 x + a\cos x + 1$ について，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $a = 1$ のとき，$f(x)$ の最大値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。

(2) a が $0 < a < 2$ の値であるとき，$f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{2}$ となるような a の値は $\boxed{}$ である。

(3) a が $a \geqq 2$ の値であるとき，$f(x)$ の最大値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。また，$f(x)$ の最小値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。（帝京大）

チェック・チェック

118 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用して，与式を $\sin\theta$ についての 2 次式とみます。
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ ですから，$\sin\theta$ は $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ の範囲で動きます。

119 親切な誘導に従い，$f(\theta)$ を $\cos\theta$ についての関数として変形します。
問題文の関係式 ①，② は誘導がなくても頭に入っていなければならない等式です。

120 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を利用すると，$f(x)$ は $\cos x$ についての 2 次式となります。$\cos x = t$ とおくと，t についての 2 次関数の最大・最小問題となります。
　$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ です。定義域と軸の位置に注意しながらグラフをかき，最大値，最小値を求めましょう。

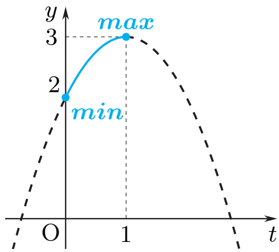
解答・解説

118 $\sin x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$0 \leqq t \leqq 1$$

であり

$$\begin{aligned} &2\cos^2\theta + 2\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= 2(1-\sin^2\theta) + 2\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= -t^2 + 2t + 2 = -(t-1)^2 + 3 \end{aligned}$$



$0 \leqq t \leqq 1$ より

$t = 1$ すなわち $x = 90^\circ$ のとき，最大値は $\underline{\mathbf{3}}$

$t = 0$ すなわち $x = 0^\circ,\ 180^\circ$ のとき，最小値は $\underline{\mathbf{2}}$

119 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ で $f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ の最小値を求める。

サインとコサインの関係より

$$\underline{\boldsymbol{\sin^2\theta}} + \underline{\boldsymbol{\cos^2\theta}} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

次に，両辺を $\cos^2\theta$ でわることによって

$$\underline{\mathbf{1}} + \underline{\boldsymbol{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。与式より

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

サインとコサインの関係 ① を使って

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2(1-\cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 2 + \underline{\boldsymbol{\cos^2\theta}} + \tan^2\theta \quad \cdots\cdots ③$$

②の関係を使って

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + \cos^2\theta + (1 + \tan^2\theta) \\ &= 1 + \cos^2\theta + \underline{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\cos^2\theta}}} = \left(\cos\theta - \underline{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\cos\theta}}}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって，$\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta} = 0$ のとき，$f(\theta)$ は最小となる。このとき

$$\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} = 0 \qquad \therefore \quad \cos^2\theta = 1$$

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ から，$\underline{\boldsymbol{\cos\theta = 1}}$ すなわち $\underline{\boldsymbol{\theta = 0^\circ}}$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\underline{\mathbf{3}}$ となる。

120 $f(x)=\sin^2 x+a\cos x+1=(1-\cos^2 x)+a\cos x+1$

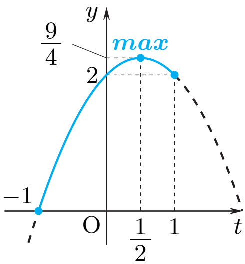
$$=-\cos^2 x+a\cos x+2$$

$\cos x=t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり

$$f(x)=-t^2+at+2=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+2=g(t)$$

(1) $a=1$ のとき

$$g(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



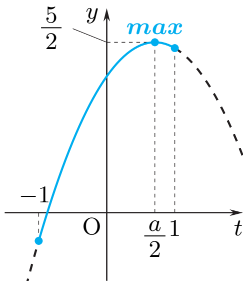
$-1\leqq t\leqq 1$ より，$g(t)$ すなわち $f(x)$ について

最大値は $g\left(\frac{1}{2}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{9}{4}}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$t=\frac{1}{2}$ のとき

$\cos x=\frac{1}{2}$　　$\therefore\quad x=\underline{\mathbf{60}}^\circ$

(2) $0<a<2$ のとき，軸の方程式 $t=\frac{a}{2}$ は



$0<\frac{a}{2}<1$ をみたすから，$-1\leqq t\leqq 1$ における

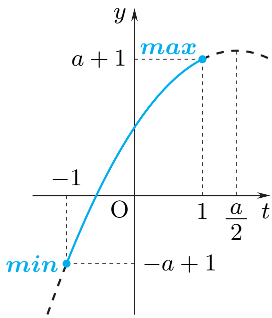
$g(t)$ の最大値は $g\left(\frac{a}{2}\right)$ である。よって

$$\frac{a^2}{4}+2=\frac{5}{2}$$

$\therefore\quad a=\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$　$(\because\quad 0<a<2)$

(3) $a\geqq 2$ のとき，$y=g(t)$ のグラフの軸の方程式 $t=\frac{a}{2}$

は $\frac{a}{2}\geqq 1$ をみたすから，$-1\leqq t\leqq 1$ における $g(t)$ の



最大値は　$g(1)=a+1$

最小値は　$g(-1)=-a+1$

である。$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$t=1$ のとき

$\cos x=1$　　$\therefore\quad x=0^\circ$

また，$t=-1$ のとき

$\cos x=-1$　　$\therefore\quad x=180^\circ$

だから，$f(x)$ の

最大値は $\underline{\boldsymbol{a+1}}$，そのときの x の値は $\underline{\mathbf{0}}^\circ$

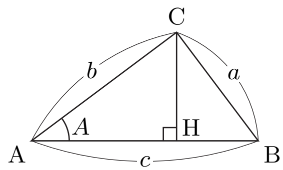
最小値は $\underline{\boldsymbol{-a+1}}$，そのときの x の値は $\underline{\mathbf{180}}^\circ$

2　図形への応用

2.1　余弦定理

問題

121 右図の $\triangle$ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし $\angle$A の大きさを A で表す。C から AB に垂線 CH を引く。$\triangle$ACH において CH = $\boxed{}$，AH = $\boxed{}$ である。したがって，BH = $\boxed{}$ 。そこで，$\triangle$BCH に三平方の定理を適用することにより，余弦定理 $a^2 = \boxed{}$ が導かれる。



（高知工科大）

122 (1) 三角形 ABC において，AB = 3，AC = 2，$\angle$A = 60° のとき，BC = $\boxed{}$ である。（福岡工業大）

(2) $\triangle$ABC において $\angle$B = 30°，AB = $\sqrt{3}$，AC = $\sqrt{13}$ のとき，BC = $\boxed{}$ である。（八戸工業大）

(3) $\triangle$ABC において，AB = 5，BC = 8，CA = 7 とする。このとき，$\cos B$ の値は $\boxed{}$ であり，また $\triangle$ABC の面積は $\boxed{}$ である。

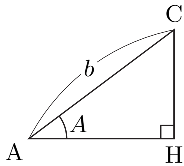
（日本歯科大）

チェック・チェック

121 直角三角形 ACH に着目しましょう。

$$\sin A = \frac{\mathrm{CH}}{b},\quad \cos A = \frac{\mathrm{AH}}{b}$$

ですね。

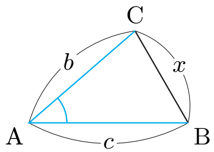


122 (1) “2 辺と夾角” が与えられたときの問題です。

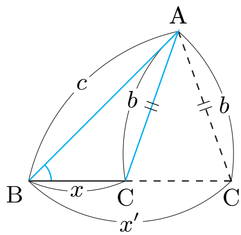
$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

(2) “2 辺と 1 つの角” が与えられたときの問題です。角が 2 辺の夾角でないときは，三角形は 1 通りに決まるとは限りません。

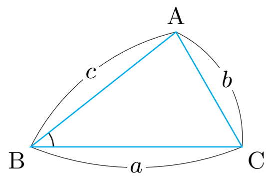
(3) “3 辺” が与えられたときの問題です。余弦定理は $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ の形でも使われます。



(1) の図



(2) の図



(3) の図

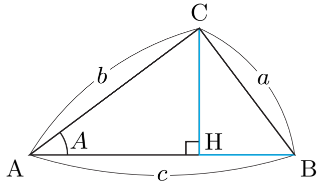
解答・解説

121 直角三角形 ACH において

$\mathrm{CH} = \mathrm{AC} \cdot \sin A = \underline{\boldsymbol{b \sin A}}$

$\mathrm{AH} = \mathrm{AC} \cdot \cos A = \underline{\boldsymbol{b \cos A}}$

よって　$\underline{\mathbf{BH} = \boldsymbol{c - b\cos A}}$

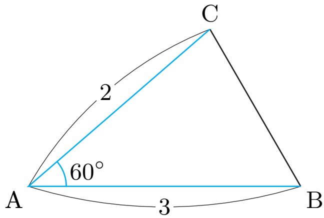


次に，直角三角形 BCH に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= \underline{\boldsymbol{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}} \end{aligned}$$

122 (1) 余弦定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\cos 60^\circ \\ &= 9 + 4 - 6 = 7 \end{aligned}$$



$\mathrm{BC} > 0$ より

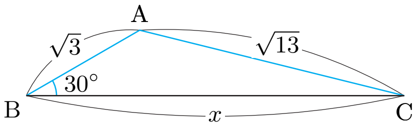
$\underline{\mathbf{BC} = \boldsymbol{\sqrt{7}}}$

(2) $\mathrm{BC} = x$ とおくと，余弦定理より

$13 = 3 + x^2 - 2\sqrt{3}x\cos 30^\circ$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x - 5)(x + 2) = 0$



$x > 0$ より

$\underline{\mathbf{BC} = \mathbf{5}}$

【注意】本問は一意的に定まりました。2 次方程式が異なる正の 2 解をもつときには注意しましょう。

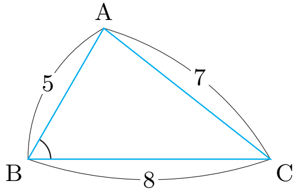
(3) 余弦定理より

$$\cos B = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ より　$B = 60^\circ$

次に，三角形の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \underline{\boldsymbol{10\sqrt{3}}}$$



2.2　三角形の成立条件

問題

123 三角形 ABC において，辺 AC の長さが 8，辺 AB の長さが 4 であるとする。このとき，辺 BC の長さ a の範囲は $\boxed{} < a < \boxed{}$ であり，角 A が鈍角であるときの a の範囲は $\boxed{} < a < \boxed{}$ である。

（駒澤大）

124 三角形 △ABC の各辺の長さがそれぞれ

$$\mathrm{AB} = x - 1, \quad \mathrm{BC} = 2, \quad \mathrm{AC} = 5 - x$$

であるとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形の面積がとる値の最大値を求めよ。

（同志社大　改）

チェック・チェック

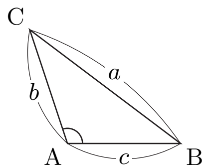
123 3 辺の長さが a，b，c となる**三角形の成立条件は**

$$|a - b| < c < a + b$$

であり，**∠A が鈍角である条件は**

$$b^2 + c^2 < a^2$$

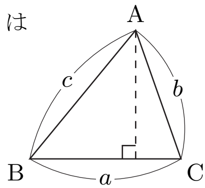
です。



124 2 辺の長さと夾角が与えられたときの △ABC の面積 S は

$$S = \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\left(= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B\right)$$



3 辺の長さが与えられたときの △ABC の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ただし，s = \frac{a+b+c}{2}$$

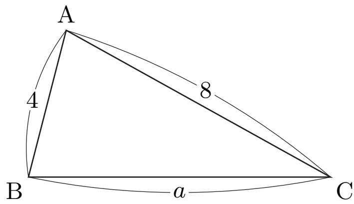
という公式（ヘロンの公式）もあります。

解答・解説

123 三角形の成立条件より

$$|8-4| < a < 8+4$$

$\therefore$ $\underline{\mathbf{4 < a < 12}}$ $\cdots\cdots$①



このもとで，$\angle$A が鈍角ならば

$$4^2 + 8^2 < a^2$$

$\therefore$ $a > 4\sqrt{5}$

① と合わせて

$$\underline{\mathbf{4\sqrt{5} < a < 12}}$$

124 (1) 三角形の成立条件は

$$|(x-1)-(5-x)| < 2 < (x-1)+(5-x)$$

$\therefore$ $|x-3| < 1$

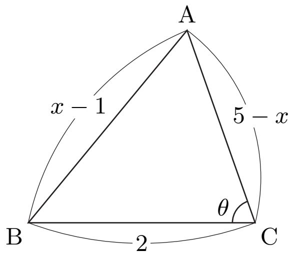
$-1 < x-3 < 1$ より　$\underline{\mathbf{2 < x < 4}}$

(2) $\angle\mathrm{C} = \theta$ とすると，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{2^2+(5-x)^2-(x-1)^2}{2\cdot 2(5-x)} = \frac{28-8x}{4(5-x)} = \frac{7-2x}{5-x}$$

三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(5-x)\sin\theta \\
&= (5-x)\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= (5-x)\sqrt{1-\left(\frac{7-2x}{5-x}\right)^2} \\
&= \sqrt{(5-x)^2-(7-2x)^2} \\
&= \sqrt{-3x^2+18x-24} \\
&= \sqrt{-3(x-3)^2+3}
\end{aligned}$$



(1) より $2 < x < 4$ だから，$\triangle$ABC の面積の最大値は

$x=3$ のとき，$\underline{\textbf{最大値}\ \sqrt{3}}$

別解 $s = \dfrac{(x-1)+2+(5-x)}{2} = 3$ とおくと，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \sqrt{s(s-x+1)(s-2)(s-5+x)} \\
&= \sqrt{3\cdot(4-x)\cdot 1\cdot(x-2)} \\
&= \sqrt{-3x^2+18x-24}
\end{aligned}$$

（以下解答と同じ）

2.3 正弦定理

問題

125 正弦定理 $a = 2R\sin A$（R は外接円の半径）が成り立つことを鋭角三角形の場合について証明せよ。（杏林大）

126 (1) $\triangle$ABC において $\angle$A $= 60°$，BC $= 2$ のとき，外接円の半径を求めよ。（法政大）

(2) 半径 4 の円に内接する三角形 ABC で $4\sin(A+B)\sin C = 3$ のとき，$C = \boxed{}°$ または，$\boxed{}°$ であり，AB $= \boxed{}$ である。（西日本工業大）

(3) 三角形 ABC において，$\angle$B $= 30°$，$\angle$C $= 105°$，辺 BC の長さが 10 のとき，辺 AC の長さを求めよ。（東京電機大）

127 $\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ とする。最大角を θ とするとき，$\cos\theta = \boxed{}$ である。（日本工業大）

チェック・チェック

125 円周角の定理を用いて直角三角形をつくります。鈍角のときの証明は教科書を見てください。

126 (1) 外接円の半径を求めるには，まずは正弦定理です。

(2) つまり，$\triangle$ABC の外接円の半径は 4 です。また，三角形の内角の和 $A+B+C$ は $180°$ でしたね。

(3) 2 角がわかれば，残りの 1 角がわかります。

127 正弦定理を用いれば

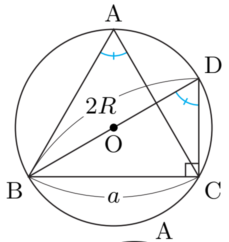
$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = a : b : c$$

であり，角についての条件式を辺についての条件式に書き直すことができます。

解答・解説

125 右図のように，B を通る直径 BD を引き，直角三角形 DBC をつくる。円周角の定理より，$\angle A = \angle D$ であるから

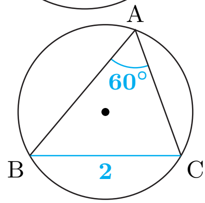
$$a = 2R\sin D = 2R\sin A \qquad \text{（証終）}$$



126 (1) 外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore\quad R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$



(2) $A + B + C = 180^\circ$ だから

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$4\sin(A+B)\sin C = 3 \qquad \therefore\quad \sin^2 C = \frac{3}{4}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ より　　$0 < \sin C \leqq 1$

よって　　$\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\therefore\quad C = \underline{\mathbf{60}}^\circ$ または $\underline{\mathbf{120}}^\circ$

また，△ABC の外接円の半径を R とすると $R = 4$ だから，正弦定理より

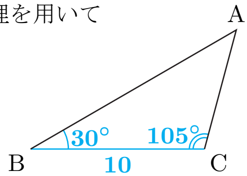
$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R \qquad \therefore\quad \mathrm{AB} = 2R\sin C = 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\boldsymbol{4\sqrt{3}}}$$

(3) $\angle\mathrm{A} = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$ より，正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC} = \mathrm{BC}\cdot\frac{1}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ = 10\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\boldsymbol{5\sqrt{2}}}$$



127 △ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

なので，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ のとき

$$a : b : c = 5 : 6 : 7$$

したがって，$t > 0$ として $a = 5t$，$b = 6t$，$c = 7t$ と表せる。

最大辺 c の対角 C が最大角 θ なので，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25t^2 + 36t^2 - 49t^2}{2\cdot 5t\cdot 6t} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{5}}}$$

2.4　外接円・内接円の半径

問題

128 3 辺の長さが 2，3，4 である三角形の最大角の余弦および外接円の半径を求めよ。（東京女子大　改）

129 三角形 ABC において AB = 8，AC = 5，BC = 7 とする。このとき，∠A の大きさおよび内接円の半径 r を求めよ。（城西大）

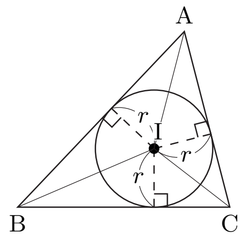
130 3 辺の長さが a, b, c の直角三角形の外接円の半径が $\dfrac{3}{2}$, 内接する円の半径が $\dfrac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

(1) a の値を求めよ。　　(2) b と c の値を求めよ。（群馬大）

チェック・チェック

128 **最大辺の対角が最大角**であり，3 辺の長さが与えられているので，余弦定理を用いれば最大角の余弦を求めることができます。

129 △ABC の内心（内接円の中心）を I として，内接円の半径を r とおくと

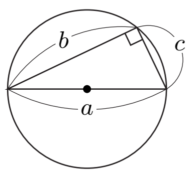


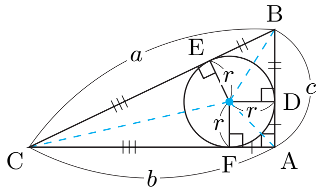
$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABI} + \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot r$$
$$= \frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

です。

130 直角三角形の外接円の直径 $2R$ は斜辺に一致します。また，直角三角形の内接円の半径 r は，前問のように面積に関連付けて求めることもできますが，次のように考えて求めることもできます。

$$a = \mathrm{BE} + \mathrm{EC} = \mathrm{BD} + \mathrm{CF} = (c - r) + (b - r) \qquad \therefore\quad r = \frac{b+c-a}{2}$$





解答・解説

128 **最大辺の対角が最大角**となるので，長さ 4 の辺と向かいあう角 θ が最大角である。余弦定理より $\cos\theta = \dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3} = \underline{\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ だから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

外接円の半径を R とすれば，正弦定理より

$$2R = \frac{4}{\sin\theta} \qquad \therefore \quad R = \frac{2}{\sin\theta} = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{15}} = \underline{\boldsymbol{\frac{8\sqrt{15}}{15}}}$$

129 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{A} = \frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\angle\mathrm{A} = 60^\circ}}$$

$\triangle$ABC の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin60^\circ = \frac{1}{2}\cdot8\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

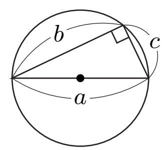
また，$\triangle$ABC の内接円の半径を r とおくと

$$\boldsymbol{S = \frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})}$$

$$\frac{r}{2}(8+7+5) = 10\sqrt{3} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{r = \sqrt{3}}}$$

130 (1) $a \geqq b \geqq c$ より，a が直角三角形の斜辺の長さとなる。直角三角形の斜辺は外接円の直径なので

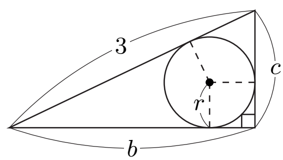
$$a = 2\times\frac{3}{2} = \underline{\boldsymbol{3}}$$



(2) 三平方の定理より $b^2+c^2 = 3^2$ ……①

直角三角形の内接円の半径を r とすると，$r = \dfrac{1}{2}$ より

$$\boldsymbol{\frac{b+c-3}{2} = \frac{1}{2}} \qquad \therefore \quad c = 4-b$$



① に代入すると

$$b^2+(4-b)^2 = 9 \qquad \therefore \quad b = \frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$$

このとき， $c = 4-b = 4-\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4\mp\sqrt{2}}{2}$ （複号同順）

$b \geqq c$ より $\underline{\boldsymbol{b = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}}}$，$\underline{\boldsymbol{c = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}}}$

2.5 円に内接する四角形

問題

131 AB = 4，BC = 5，CA = 6 である △ABC において，△ABC の外接円上に点 D を A，B，C，D がこの順に並ぶようにとる。CD = 2 のとき，DA = $\boxed{}$ である。 （大同大 改）

132 四角形 ABCD は AB = 4，BC = 4，CD = 5，DA = 9 であり，点 O を中心とする円に内接している。このとき，BD = $\boxed{}$，AC = $\boxed{}$ である。 （慶應義塾大）

133 円に内接する四角形 ABCD は

$$AB = BC = 2\sqrt{2},\ BD = 2\sqrt{3},\ \angle ABC = 120^\circ$$

をみたすとする。ただし，AD > CD とする。

このとき

$$AC = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ \angle BDC = \boxed{\text{ウエ}}^\circ$$

であり，円 O の半径は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ となる。

また，$\sin\angle BAD = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。さらに

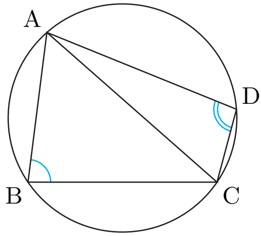
$$AD = \boxed{\text{ケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}},\ CD = \boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。 （センター試験）

チェック・チェック

131 △ABCは3辺の長さが確定しているので，余弦定理を用いればどの角に対しても余弦の値を求めることができます。

また，円に内接する四角形の**向かい合う角の和は 180°** です。△ABC，△DACにおいて，∠ABCと∠ADCに対して，向かい合う角の和の関係が適用できます。

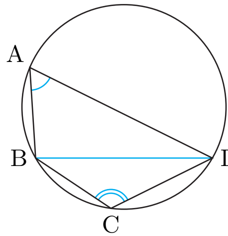


132 四角形ABCDを対角線BDあるいはACで2つの三角形に分割します。円に内接する四角形の**向かい合う角の和は 180°** であることを利用しながら余弦定理を使うのがポイントです。

本問は，最初にBDの長さが問われていますから，BDで2つの三角形に分割します。このとき，$C=180^\circ-A$ が成り立ちます。すなわち

$$\cos C=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$$

となります。

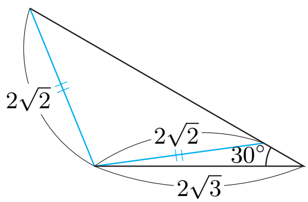


教科書ではあまり取り扱っていませんが，円に内接する四角形の対角線に関する次の定理があります。

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}$$ （**トレミーの定理**）

133 条件を図示すると，四角形ABCDはBDによって，2つの三角形に分割されますが，本問はACを求めることから始まります。ですから，ACによる分割を考えましょう。

なお，△ABDと△CBDは“2辺と1つの角”が等しい三角形です。角が2辺の夾角でないとき，三角形は1通りには定まらないこともあります。余弦定理を用いるときは注意しましょう。



解答・解説

131 $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおく。$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いると

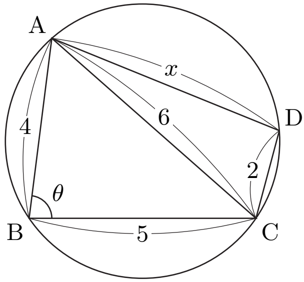
$$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

また，$\mathrm{DA}=x$ とおく。$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-\theta$ であるから，$\triangle\mathrm{CDA}$ において余弦定理を用いると

$$6^2=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cdot\cos(180^\circ-\theta)$$
$$36=4+x^2-4x(-\cos\theta)$$
$$x^2+\frac{1}{2}x-32=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm3\sqrt{57}}{4}$$

$x=\mathrm{DA}>0$ より

$$\mathbf{DA}=\frac{-1+3\sqrt{57}}{4}$$

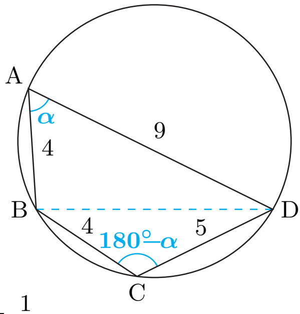


132 $\angle\mathrm{BAD}=\alpha$ とおき，$\triangle\mathrm{ABD}$ において，余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=4^2+9^2-2\cdot4\cdot9\cos\alpha$$
$$=97-72\cos\alpha\quad\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\alpha$ なので $\triangle\mathrm{BCD}$ において，余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$=41+40\cos\alpha\quad\cdots\cdots②$$



①，②より

$$97-72\cos\alpha=41+40\cos\alpha\qquad\therefore\quad\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

①に代入して

$$\mathrm{BD}^2=97-72\cdot\frac{1}{2}=61\qquad\therefore\quad\mathbf{BD}=\sqrt{61}$$

同様に，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とおくと，$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\beta$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{ADC}$ において余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cos\beta=32-32\cos\beta\quad\cdots\cdots③$$
$$\mathrm{AC}^2=5^2+9^2-2\cdot5\cdot9\cos(180^\circ-\beta)=106+90\cos\beta\quad\cdots\cdots④$$

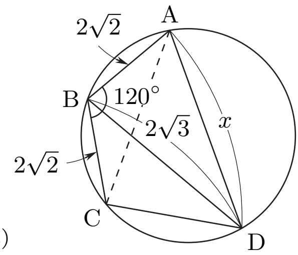
よって，③，④より

$$122\cos\beta=-74\qquad\therefore\quad\cos\beta=-\frac{37}{61}$$

③に代入して

$$\mathrm{AC}^2=32\left(1+\frac{37}{61}\right)\qquad\therefore\quad\mathbf{AC}=\frac{56\sqrt{61}}{61}$$

133 $\triangle$ABC において余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B\\ &= 8+8-16\cos 120^\circ = 24\end{aligned}$$

AC >0 より　　$\underline{\mathbf{AC = 2\sqrt{6}}}$

円周角の定理から

$$\angle BDC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \underline{\mathbf{30^\circ}}$$

($\because$　$\triangle$ABC は二等辺三角形)

外接円の半径を R として $\triangle$ABC において正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R \qquad \therefore \quad R = \frac{AC}{2\sin 120^\circ} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\mathbf{2\sqrt{2}}}$$

よって，$\triangle$ABD において正弦定理を用いると

$$2R = \frac{BD}{\sin\angle BAD} \qquad \therefore \quad \sin\angle BAD = \frac{BD}{2R} = \frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{2}} = \underline{\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{4}}}$$

また，円周角の定理より，$\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$ なので，AD $= x$ として，$\triangle$ABD において余弦定理を用いると

$$(2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}x\cos 30^\circ$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \qquad \therefore \quad x = 3\pm\sqrt{5}$$

ところで，$\triangle$ABD と $\triangle$CBD において，BD が共通。$\angle ADB = \angle CDB = 30^\circ$，AB $=$ BC $= 2\sqrt{2}$ であることから，この方程式の 2 解は，AD，CD の値である。AD $>$ CD より

$$\underline{\mathbf{AD = 3+\sqrt{5}}},\quad \underline{\mathbf{CD = 3-\sqrt{5}}}$$

四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}&\triangle ABC + \triangle ACD\\ &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC + \frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sin 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(8+4) = \underline{\mathbf{3\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

2.6　三角形の形状決定

問題

134　三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。次の等式が成り立つときこの三角形はどのような形状か。

(1) $a=2b\cos C$

(2) $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$

(3) $a^2=b^2+c^2+bc$　（広島女学院大）

135　△ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする。次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような三角形か。

(1) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$

(2) $a\cos B-b\cos A=c$　（松山大　改）

136　△ABC において $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ と表すとき

$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\tan B}{b^2}$$

が成り立つ △ABC はどのような三角形か。　（横浜国立大　改）

チェック・チェック

134 三角形の形状決定問題は，正弦定理や余弦定理を用いて，辺の長さ a，b，c のみの関係式，または，角の大きさ A，B，C のみの関係式をつくるのがポイントです。角の関係式にもち込むと，三角比に関するいろいろな公式を使うことが多く，**辺のみの関係式**をつくった方がラクな場合が多いです。

(1) 余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

を代入すれば，辺の長さ a，b，c のみの関係式が得られます。

(2) 正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

を代入すれば，辺のみの関係式が得られます。

(3) 最初から 3 辺の長さのみの関係式で，辺のみの関係式として，これ以上変形できそうにありません。そこで，左辺の a^2 を余弦定理を利用して別の形で表してみましょう。

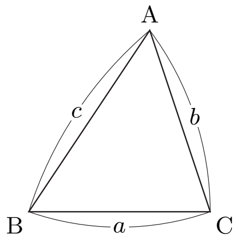
135 いずれも cos があります。余弦定理を利用して辺の長さ a，b，c の関係式で表してみましょう。

136 tan は cos と sin で表すことができます。余弦定理と正弦定理を利用して辺の長さ a，b，c の関係式で表してみましょう。

解答・解説

134 (1) 余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



これを用いて $a = 2b\cos C$ を変形すると

$$a = 2b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2 = a^2+b^2-c^2 \qquad \therefore \quad b^2 = c^2$$

$b>0$, $c>0$ より　$b=c$

よって，<u>**$b=c$ の二等辺三角形**</u>

(2) R を $\triangle$ABC の外接円の半径として正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

これを用いて $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ を変形すると

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \qquad \therefore \quad a^2 = b^2+c^2$$

よって，<u>**$\angle$A $= 90^\circ$の直角三角形**</u>

(3) 余弦定理より

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

これを用いて $a^2 = b^2+c^2+bc$ を変形すると

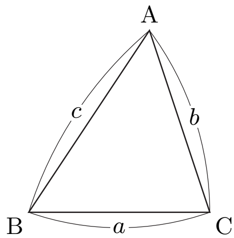
$$b^2+c^2-2bc\cos A = b^2+c^2+bc \qquad \therefore \quad bc(1+2\cos A) = 0$$

$b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ より

$$1+2\cos A = 0 \qquad \therefore \quad \cos A = -\frac{1}{2}$$

よって，<u>**$\angle$A $= 120^\circ$の三角形**</u>

135 (1) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$ より　$a\cos B=b\cos A$



さらに，余弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \qquad \therefore\quad a^2=b^2$$

$a>0$，$b>0$ より　$a=b$

よって，**$a=b$ の二等辺三角形**

(2) $a\cos B-b\cos A=c$ で左辺に余弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=c$$

$$a^2+c^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2$$

よって，**$\angle$A $=90^\circ$の直角三角形**

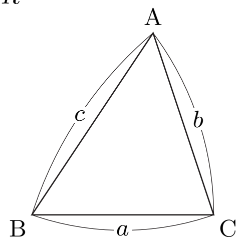
136 外接円の半径を R とし，正弦定理，余弦定理を適用すると

$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\sin A}{a^2\cos A}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{bc}{a(b^2+c^2-a^2)R}$$

同様にして

$$\frac{\tan B}{b^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}=\frac{ca}{b(a^2+c^2-b^2)R}$$

が成り立つ。したがって



$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\tan B}{b^2}$$

$$\frac{bc}{a(b^2+c^2-a^2)R}=\frac{ca}{b(a^2+c^2-b^2)R}$$

$$\frac{b}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{a}{b(a^2+c^2-b^2)}$$

$$b^2(a^2+c^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$$

c について整理して

$$(b^2-a^2)c^2-(b^4-a^4)=0$$

$$(b^2-a^2)c^2-(b^2+a^2)(b^2-a^2)=0$$

$$(b+a)(b-a)\{c^2-(b^2+a^2)\}=0$$

$b+a>0$ なので

$$b=a \quad \text{または} \quad c^2=a^2+b^2$$

つまり，**AC $=$ BC の二等辺三角形** であるか，または **$\angle$C $=90^\circ$ の直角三角形** である。

2.7 面積

問題

137 (1) $\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:3$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ のとき $\triangle$ABC の面積は $\boxed{}$ である。 (中京大)

(2) $\triangle$ABC において，$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=2:3:4$ であり，面積が $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ であるとき，辺 BC の長さは $\boxed{}$ である。 (昭和薬科大)

138 $\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AC}=b$ である三角形 ABC について，以下の問に答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) $\angle$A の 2 等分線が辺 BC と交わる点を P とする。このとき，AP の長さを求めよ。 (専修大)

139 (1) 平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=5$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=7$，対角線 $\mathrm{BD}=8$ であるとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(自治医科大)

(2) 四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\angle\mathrm{B}=75^\circ$，$\mathrm{DA}=1$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ であるとき，この四辺形の面積は $\boxed{}$ である。

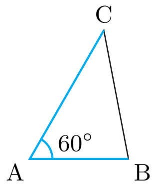
(奈良県立医科大)

140 1 辺の長さがそれぞれ x cm の正六角形の面積は $\boxed{}$ cm^2，正八角形の面積は $\boxed{}$ cm^2 である。 (立教大)

チェック・チェック

137 (1) △ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}\sin\angle\mathbf{BAC}$



です。∠BAC $=60^\circ$ と与えられているので，AB，AC の長さがわかれば面積が得られます。AB : AC $=2:3$ より，**AB** $=\boldsymbol{2x}$，**AC** $=\boldsymbol{3x}$ とおくことができ，BC $=2\sqrt{7}$ と合わせると，x を求めることができます。このとき用いるのは余弦定理です。

(2) BC : CA : AB $=2:3:4$ より，BC $=2x$，CA $=3x$，AB $=4x$ とおくことができ，3 辺の長さが決まれば，余弦定理より頂角の余弦の値を求めることができます。

138 (1) b，c は与えられた長さとして用いてよいので，公式そのものを書けという問題ですね。

(2) 面積 △ABC $=$ △ABP $+$ △APC に着目して，AP についての関係式をつくります。

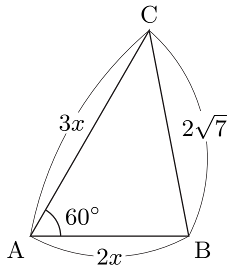
139 (1)（平行四辺形 ABCD の面積）$=2\times$（△ABD の面積）です。

(2) まず，与えられた条件をもつ四辺形を図示してみましょう。あとに四辺形の分割の仕方を考えます。

140 正八角形の外接円の中心と各頂点を結ぶと正八角形は 8 個の二等辺三角形に分割されます。

解答・解説

137 (1) $AB : AC = 2 : 3$ より，$AB = 2x$，$AC = 3x$ とおける。余弦定理を用いると



$$(2\sqrt{7})^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ$$

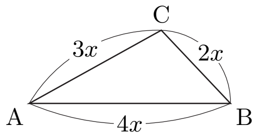
$$28 = 4x^2 + 9x^2 - 12x^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4 \qquad \therefore \quad x = 2 \quad (\because \quad x > 0)$$

よって，$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\boldsymbol{6\sqrt{3}}}$$

(2) $BC : CA : AB = 2 : 3 : 4$ より $BC = 2x$，$CA = 3x$，$AB = 4x$ とおける。余弦定理を用いると



$$\cos A = \frac{(3x)^2 + (4x)^2 - (2x)^2}{2 \cdot 3x \cdot 4x} = \frac{7}{8}$$

このとき，$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ だから

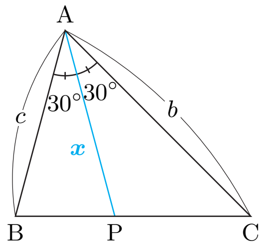
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$\triangle ABC$ の面積が $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ のとき

$$\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{3} \qquad x^2 = \frac{4}{9} \qquad \therefore \quad x = \frac{2}{3} \quad (\because \quad x > 0)$$

よって　$BC = 2 \cdot \dfrac{2}{3} = \underline{\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}}$

138 (1) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4} bc}}$



(2) $AP = x$ とおくと，(1) より

$$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle APC$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} bc = \frac{1}{2} cx \sin 30^\circ + \frac{1}{2} bx \sin 30^\circ$$

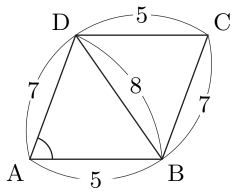
$$\sqrt{3} bc = (b + c)x \qquad \therefore \quad AP = x = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3} bc}{b + c}}}$$

別解 AP は $\angle A$ の 2 等分線より　$BP : PC = AB : AC = c : b$

$\triangle ABP$ の面積を 2 通りに考えると

$$\frac{1}{2} cx \sin 30^\circ = \frac{c}{b + c} \cdot \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ \qquad \therefore \quad x = \frac{\sqrt{3} bc}{b + c}$$

139 (1) △ABD において余弦定理を用いると



$$\cos A = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{7}$$

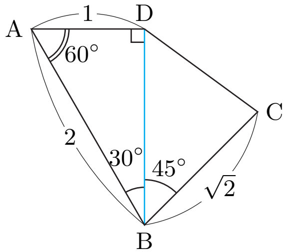
このとき，$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

よって，平行四辺形 ABCD の面積は

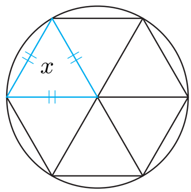
$$2\times \triangle \mathrm{ABD} = 2\times\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = \underline{\mathbf{20\sqrt{3}}}$$

(2) △ABD は $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AD}=1$, $\mathrm{DB}=\sqrt{3}$ の直角三角形であり，$\angle\mathrm{DBC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ である。よって，四辺形の面積 S は



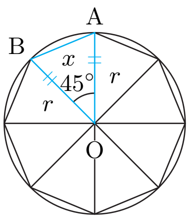
$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\mathbf{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

140 1 辺の長さが x の正三角形 6 個分の面積を考えて



$$6\times\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\sin 60^\circ = \underline{\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}\ \mathbf{(cm^2)}}$$

次に，正八角形の外接円の半径を r として，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=r$, $\mathrm{AB}=x$, $\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ の △OAB を考える。余弦定理より

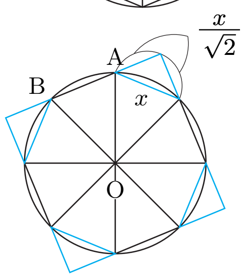


$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cos 45^\circ$$
$$x^2 = (2-\sqrt{2})r^2$$
$$\therefore\quad r^2 = \frac{x^2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}x^2$$

したがって，正八角形の面積は

$$\begin{aligned} 8\times\triangle\mathrm{OAB} &= 8\times\frac{1}{2}r^2\sin 45^\circ = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}x^2 \\ &= \underline{\mathbf{2(\sqrt{2}+1)}\boldsymbol{x^2}\ \mathbf{(cm^2)}} \end{aligned}$$

別解 右図より，求める面積は

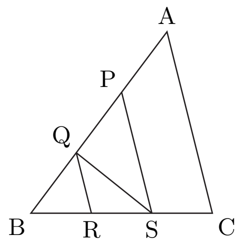


$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + x + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\times\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= (\sqrt{2}+1)^2x^2 - x^2 = 2(\sqrt{2}+1)x^2\ (\mathrm{cm}^2)$$

2.8　相似形の面積比

問題

141 図の三角形 ABC において，辺 AB を 3 等分する点をそれぞれ P，Q，辺 BC を 3 等分する点をそれぞれ R，S とする。このとき，△BQR，△PQS，△ABC の面積比は $\boxed{}$: $\boxed{}$: $\boxed{}$ である。（湘南工科大）

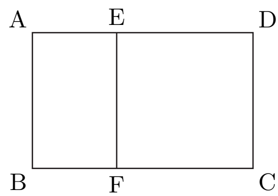


142 右図において，長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であり，四角形 CDEF が正方形であるとする。長方形 AEFB の面積を S_1，長方形 ABCD の面積を S_2 とするとき

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 1 : \boxed{},$$

$$S_1 : S_2 = 1 : \boxed{}$$

である。（北海道工業大）



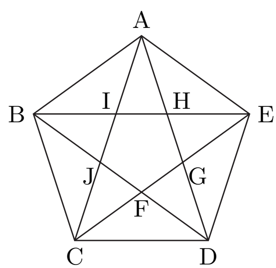
143 1 つの円に内接する正六角形の面積を S，外接する正六角形の面積を T とする。このとき，$S : T$ を求めよ。

144 図のように，正五角形 ABCDE の対角線の交点をそれぞれ F，G，H，I，J とする。

(1) ∠ABH と ∠AHB の大きさの比は，
$\angle\mathrm{ABH} : \angle\mathrm{AHB} = 1 : \boxed{}$ である。

(2) 線分 IH と線分 AI の長さの比は，
$\mathrm{IH} : \mathrm{AI} = 1 : \boxed{}$ である。

(3) 五角形 FGHIJ と正五角形 ABCDE の面積の比は，五角形 FGHIJ : 正五角形 ABCDE = $1 : \boxed{}$ である。



チェック・チェック

141 相似な平面図形 A，B の**相似比が $a : b$** であるとき，A，B の**面積比は $a^2 : b^2$** です。

142 長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{AE} : \mathrm{AB}$$

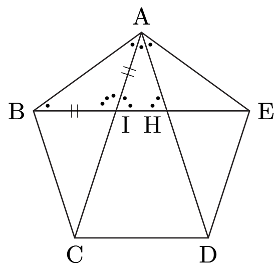
であり，四角形 CDEF が正方形であることより

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} - \mathrm{AE}$$

です。AE を消去することにより AB と BC の関係式が得られます。$\mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{AE} = x$ としても一般性は失われません。

143 正六角形は中心 O を 1 つの頂点とする 6 個の正三角形に分割されます。各正六角形の一辺の長さの比が相似比であり，2 つの正六角形の**面積比**は，**(相似比)^2** となります。

144 正五角形の中にはいくつかの相似な三角形があります。



(1) 正五角形の内角の総和は △ABC，△ACD，△AED の内角の和に等しいから

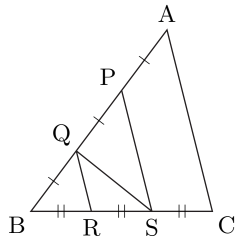
$$\angle\mathrm{BAE} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 36^\circ \times 3 = 108^\circ$$

36° を●で表すと，△ABH 内の角は右図のようになります。

(2) △AIH ∽ △BAH であり，△IAB が二等辺三角形であることに着目します。

解答・解説

141 $\triangle QBR \backsim \triangle PBS \backsim \triangle ABC$ であり，



相似比は $1:2:3$ だから

$$\triangle QBR : \triangle PBS : \triangle ABC = 1^2 : 2^2 : 3^2$$

また，R は線分 BS の中点だから

$$\triangle QBR : \triangle QRS = 1:1$$

よって，$\triangle ABC$ の面積を 9 とすると

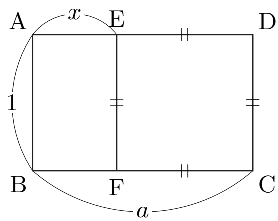
$$\triangle QBR = 1$$

$$\triangle PQS = \triangle PBS - \triangle QBR - \triangle QRS = 4 - 1 - 1 = 2$$

よって，求める面積比は

$$\triangle BQR : \triangle PQS : \triangle ABC = \underline{\mathbf{1}} : \underline{\mathbf{2}} : \underline{\mathbf{9}}$$

142 $AB = 1$，$BC = a$，$AE = x$ とおく。



長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$a : 1 = 1 : x \qquad \therefore \quad ax = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，$BF + FC = BC$ より

$$x + 1 = a \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より x を消去すると

$$a(a-1) = 1$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$AB : BC = 1 : a = 1 : \underline{\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

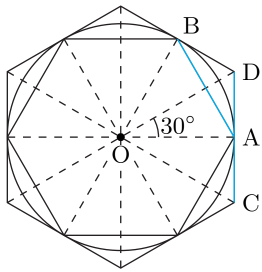
であり，長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$S_1 : S_2 = 1^2 : a^2 = 1 : \underline{\mathbf{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$$

143 図のように O，A，B，C，D をとる。円の半径 OA の長さを a とすると，内接正六角形と外接正六角形の辺の比は

$$\mathrm{AB} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : 2\mathrm{AD} = a : 2a\tan 30^\circ$$
$$= 1 : \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \sqrt{3} : 2$$

$$\therefore \quad S : T = (\sqrt{3})^2 : 2^2 = \underline{\mathbf{3 : 4}}$$



144 正五角形 ABCDE の内角の総和は △ABC，△ACD，△AED の内角の総和 $180^\circ \times 3$ に等しいから

$$\angle\mathrm{BAE} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$$

$$\angle\mathrm{BAI} = \angle\mathrm{ABI} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\angle\mathrm{AIH} = \angle\mathrm{AHI} = 72^\circ$$

である。

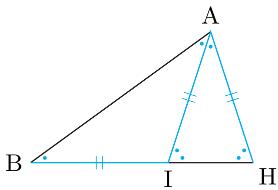
(1) $\angle\mathrm{ABH} : \angle\mathrm{AHB} = 36^\circ : 72^\circ = \underline{\mathbf{1 : 2}}$

(2) $\mathrm{IH} = 1$，$\mathrm{AI} = x$ とおくと

$$\triangle\mathrm{AIH} \backsim \triangle\mathrm{BAH}$$

より，$\mathrm{AH} = \mathrm{AI} = \mathrm{BI}$ であり

$$\mathrm{IH} : \mathrm{AH} = \mathrm{AH} : \mathrm{BH}$$
$$1 : x = x : (x+1)$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because \quad x > 0)$$



したがって

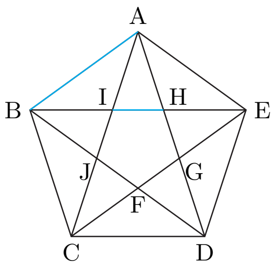
$$\mathrm{IH} : \mathrm{AI} = \underline{\mathbf{1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

(3) （五角形 FGHIJ）$\backsim$（五角形 ABCDE）であり，$\mathrm{IH} = 1$ のとき

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BH} = 1 + x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

なので，求める面積比は

$$1^2 : \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \underline{\mathbf{1 : \frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}$$



2.9　空間図形への応用

問題

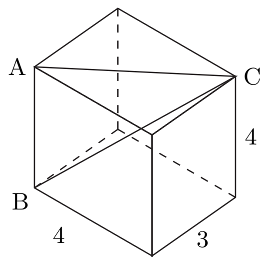
145 あるビルの高さを求めるために，壁面から 30m 離れた地点で屋上を見上げる角を測ったところ，57° であった。目の高さを 1m とするとき，このビルの高さは $\boxed{}$ m である。また，その他の条件は一切同じで，見上げる角が 67° であったとき，ビルの高さは $\boxed{}$ m である。ただし，見上げる人とビルは，ともに水平な土地にたっている。$\tan 57^\circ = 1.5399$，$\tan 67^\circ = 2.3559$ として，答は小数第 1 位で四捨五入せよ。（武蔵大）

146 地点 A から真北の方向の地点 B に塔がたっている。A から塔の先端を見上げる仰角は 60° である。A から真東に 100m 移動した地点 C から塔の先端を見上げる仰角は 30° である。このとき， AB 間の距離は $\boxed{}$ m であり，この塔の高さは $\boxed{}$ m である。（日本大）

147 底辺の縦，横がそれぞれ 3cm，4cm，高さが 4cm の直方体で，三角形 ABC を考える。三角形 ABC の面積は $\boxed{}$ である。また $\angle ABC = \alpha$ とすると

$$\sin\alpha = \boxed{},\quad \cos\alpha = \boxed{}$$

である。（桐蔭横浜大）



148 図の直方体 ABCD − EFGH において，

$$AB = 3,\ AD = 2,\ AE = 1$$

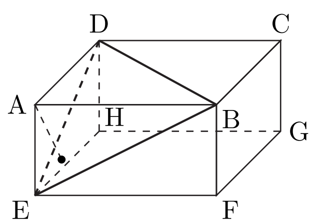
とし，$\angle DEB = \theta$ とおく。このとき，次の各問に答えよ。

(1) BD，DE，EB の長さを求めよ。

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 三角形 BDE の面積を求めよ。

(4) A から三角形 BDE に下ろした垂線の長さを求めよ。（北海道工業大）



チェック・チェック

145 まずは，状況を簡潔に図示しましょう。そうすれば，鋭角の三角比の定義からただちに計算できます。

本問のように，角を測ることによって，実測できないビルの高さや山の高さを知ること（測量）ができますね。

146 A，B，C の位置関係がわかる立体図をかきましょう。

147 空間図形といっても，その中に現れる三角形や四角形を考えると，それら 1 つ 1 つは平面図形です。

本問は $\triangle$ABC について調べますが，たとえば，1 辺 AC は，長方形の対角線です。

148 (4) では四面体 ABDE の体積を

$$\frac{1}{3} \times \mathrm{AE} \times \triangle\mathrm{ABD} \text{ と } \frac{1}{3} \times h \times \triangle\mathrm{BDE}$$

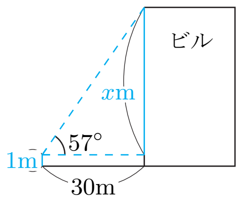
の **2 通り**に考えてみましょう。

解答・解説

145 ビルの高さから 1 m ひいた高さを x m とおくと

$$\tan 57^\circ = \frac{x}{30}$$

$$\therefore \quad x = 30 \cdot \tan 57^\circ = 30 \times 1.5399 = 46.197$$



よって，ビルの高さは，$x+1=47.197$ を小数第 1 位で四捨五入すると　**47** (m)

同じように考えて，角度が 67° のときの高さから 1 m ひいた高さを y m とおくと

$$y = 30 \cdot \tan 67^\circ = 30 \times 2.3559 = 70.677$$

よって，ビルの高さは，$y+1=71.677$ を小数第 1 位で四捨五入すると　**72** (m)

146 塔の先端を H，AB $= x$ とおくと

$$\mathrm{HB} = x \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{HB}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}\mathrm{HB} = 3x$$

また，三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

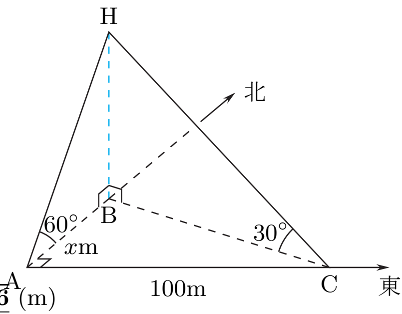
$$x^2 + 100^2 = 9x^2$$

$x > 0$ より

$$x = \sqrt{\frac{100^2}{8}} = \frac{100}{2\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}$$

よって

$$\mathrm{AB} = x = \underline{\mathbf{25\sqrt{2}}} \text{ (m)}, \quad \mathrm{HB} = \underline{\mathbf{25\sqrt{6}}} \text{ (m)}$$



147 AB $=4$，AC $= \sqrt{4^2+3^2} = 5$，AB⊥AC

なので，三角形 ABC の面積は

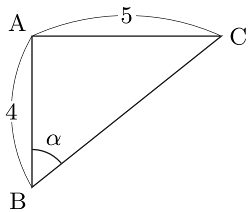
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = \underline{\mathbf{10\ (cm^2)}}$$

また，BC の長さは

$$\mathrm{BC} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$$

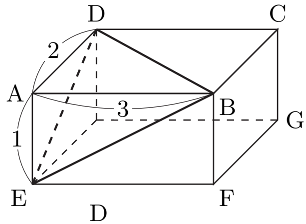
より

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \underline{\mathbf{\frac{5\sqrt{41}}{41}}}, \quad \cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \underline{\mathbf{\frac{4\sqrt{41}}{41}}}$$



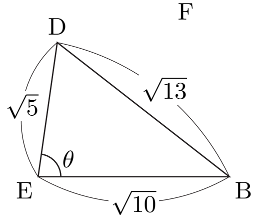
148 (1) 三平方の定理より

$$BD = \sqrt{3^2+2^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{13}}}$$
$$DE = \sqrt{2^2+1^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{5}}}$$
$$EB = \sqrt{1^2+3^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{10}}}$$



(2) 三角形 DEB に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$
$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{10}}}$$



(3) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ だから

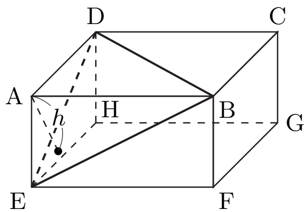
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

よって

$$\triangle BDE = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10} = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{2}}}$$

(4) 四面体 ABDE の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\times AE\times\triangle ABD$$
$$= \frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3$$
$$= 1 \quad \cdots\cdots ①$$



また，A から三角形 BDE に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V = \frac{1}{3}\times h\times\triangle BDE$$
$$= \frac{1}{3}\times h\times\frac{7}{2}$$
$$= \frac{7}{6}h \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より

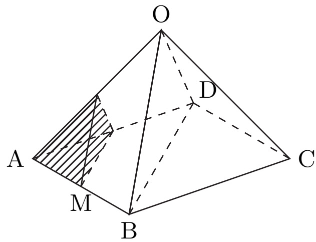
$$1 = \frac{7}{6}h \qquad \therefore \quad h = \underline{\boldsymbol{\frac{6}{7}}}$$

2.10 空間図形の体積

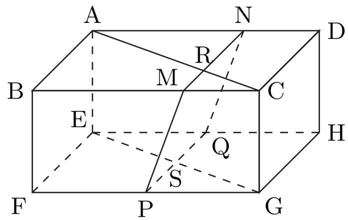
問題

149 $AB=AC=AD=3$，$BC=3$，$CD=2$，$DB=\sqrt{5}$ の三角錐 ABCD において，$\triangle BCD$ に外接する円の半径は $\boxed{}$ であり，この三角錐 ABCD の体積は $\boxed{}$ である。 （中京大）

150 図のような正四角すい OABCD があり，$OA=OB=OC=OD=AB=BC=CD=DA=4\,\mathrm{cm}$ で，点 M は辺 AB の中点である。図のように，正四角すい OABCD を，点 M を通り三角形 OBD に平行な平面で切ってできる 2 つの立体のうち，頂点 A を含む立体の体積は何 cm^3 か。



151 次の図のように，$AB=3\,\mathrm{cm}$，$AD=6\,\mathrm{cm}$，$AE=3\,\mathrm{cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 BC，AD をそれぞれ $2:1$ に分ける点を M，N とし，辺 FG，EH の中点を，それぞれ P，Q とする。対角線 AC と線分 MN の交点を R，対角線 EG と線分 PQ の交点を S とするとき，次の (1)，(2) の問いに答えなさい。



(1) 線分 MR の長さを求めなさい。

(2) 立体 $MCR-PGS$ の体積を求めなさい。

チェック・チェック

149 三角形の外接円の半径は正弦定理を利用して求めることができます。A から底面 BCD に下ろした垂線の足は，AB = AC = AD ならば，三角形 BCD の外心と一致します。

150 相似な立体図形 A，B の**相似比が $a : b$** であるとき，A，B の**体積比は $a^3 : b^3$** です。本問では，求める立体（四面体）の体積を V とおくと

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (\text{四面体 OABD の体積})$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}(\text{正四角錐 OABCD の体積})$$

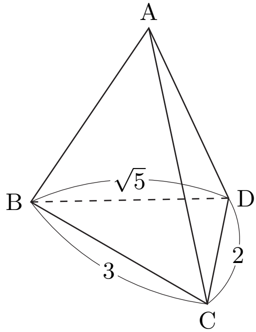
です。

151 (1) △CMR ∽ △CBA（相似比 1 : 3）です。

(2) GC，SR，PM を延長して三角錐をつくりましょう。

解答・解説

149 $\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおき，三角形 BCD に余弦定理を用いると



$$\cos\theta=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{2}{3}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ だから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

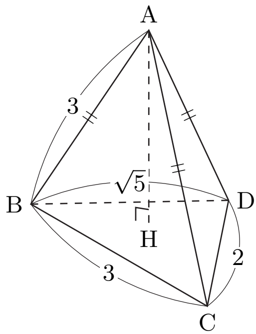
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

三角形 BCD の外接円の半径を R とする。三角形 BCD に正弦定理を用いると

$$2R=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta}\qquad\therefore\quad R=\frac{\sqrt{5}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

A から三角形 BCD に垂線 AH を引く。このとき，三平方の定理より

$$\begin{cases}\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\\ \mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\\ \mathrm{DH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\end{cases}$$



$$\therefore\quad \mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$$

よって，H は三角形 BCD の外心と一致するから

$$\mathrm{BH}=R=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

したがって，三角錐 ABCD の体積は

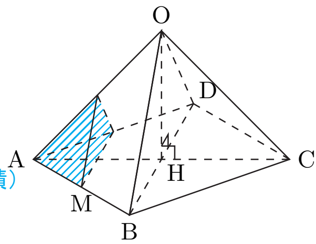
$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}}}$$

別解 三角形 BCD について，$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2$ が成り立つから，$\angle\mathrm{CDB}=90^\circ$ である。このことに気づけば，三角形 BCD の外接円は B，C を直径の両端とする円であり，R は

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2}=\frac{3}{2}$$

と求めることができる。

150 求める立体は四面体 OABD と相似であり，相似比は $\frac{1}{2}$ なので，求める体積 V は



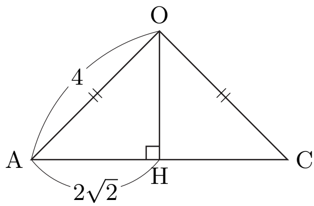
$$\boldsymbol{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \text{（四面体 OABD の体積）}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \text{（正四角錐 OABCD の体積）}$$

ここで，O から平面 ABCD へ下ろした垂線の足を H とおくと

$$\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

であるから



$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

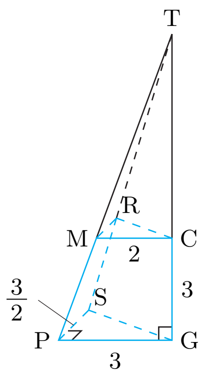
$$\therefore \quad V = \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)}}$$

151 (1) $\triangle\mathrm{CMR} \backsim \triangle\mathrm{CBA}$ であり

$$\mathrm{MR} : \mathrm{BA} = \mathrm{CM} : \mathrm{CB} = \frac{1}{3}\mathrm{CB} : \mathrm{CB} = 1 : 3$$

$$\therefore \quad \mathrm{MR} = \frac{1}{3}\mathrm{AB} = \underline{\mathbf{1\ cm}}$$

(2) 図のように 3 直線 GC，SR，PM の交点を T とおくと，三角錐 TMCR と三角錐 TPGS は相似となり，相似比は MC : PG = 2 : 3 なので，体積比は $2^3 : 3^3 = 8 : 27$ である。



よって，求める体積 V は

$$\boldsymbol{V} = \left(1 - \frac{8}{27}\right) \times \text{（三角錐 TPGS の体積）}$$

である。

$$\triangle\mathrm{PGS} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PG} \cdot \mathrm{PS} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$\mathrm{TG} = h$ とおくと，$\mathrm{TC} : \mathrm{TG} = 2 : 3$ より

$$(h - 3) : h = 2 : 3$$

$$2h = 3(h - 3) \qquad \therefore \quad h = 9$$

であるから

$$\text{（三角錐 TPGS の体積）} = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{PGS} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} \times 9 = \frac{27}{4}$$

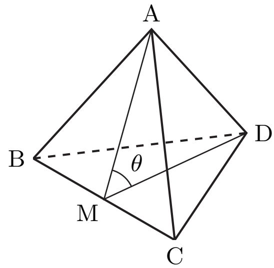
したがって

$$V = \frac{19}{27} \times \frac{27}{4} = \underline{\boldsymbol{\frac{19}{4}\ (\mathrm{cm}^3)}}$$

2.11　正四面体

問題

152　1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，$\angle \mathrm{AMD} = \theta$ とする。このとき，$\cos\theta = \boxed{}$ であり，三角形 AMD の面積は $\boxed{}$ である。　（北海道工業大）



153　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA 上に点 P がある。$\angle \mathrm{BPC} = \theta$ とする。$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ で $\mathrm{OP} < \dfrac{1}{2}$ のとき，BP の長さは $\boxed{}$ であり，OP の長さは $\boxed{}$ である。　（独協医科大）

154　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を $3:1$ に内分する点を P とする。$\angle \mathrm{BPC} = \theta$ とし，三角形 BPC の面積を S とおく。

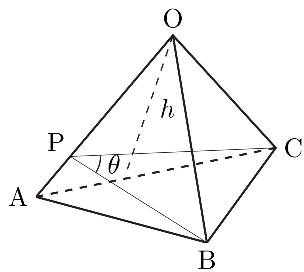
(1)　線分 BP の長さは $\boxed{}$ である。

(2)　$\cos\theta = \boxed{}$，$S = \boxed{}$ である。

(3)　正四面体 OABC の体積を V とおくと，$V = \boxed{}$ である。

(4)　点 O から三角形 BPC に下ろした垂線の長さ h は $\boxed{}$ である。

（東邦大）



チェック・チェック

152 正四面体は 4 つの合同な正三角形を面とする四面体です。また，M は辺 BC の中点より，AM，DM はそれぞれ正三角形 ABC，DBC の中線であり，三角形 AMD は AM $=$ DM の二等辺三角形です。三角形 AMD の 3 辺の長さがわかれば余弦定理より $\cos\theta$ の値が求められますし，$\cos\theta$ の値から $\sin\theta$ の値，そして面積を求めることができます。

153 △BPC は BP $=$ CP の二等辺三角形です。$\cos\theta$ の値が与えられているので余弦定理の利用を考えます。

154 (3) O から底面 ABC に下ろした垂線の足 H は

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

より三角形 ABC の外心です。さらに，三角形 ABC は正三角形であり，正三角形においては外心と重心は一致するので

H は重心

でもあります。これより

$$\mathrm{AH} = \frac{2}{3} \times (\text{中線の長さ})$$

です。

あるいは，AH は三角形 ABC の外接円の半径でもあるので，正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ} = 2 \times \mathrm{AH} \text{ より} \qquad \mathrm{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AB}$$

としてもよいですね。

(4) 四面体 OPBC の体積を，h を使うものと使わないものとで 2 通りに表してみましょう。

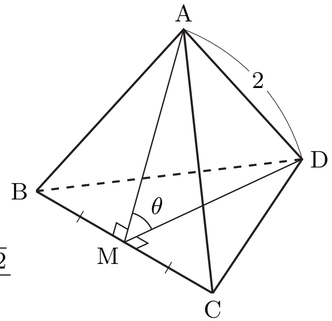
解答・解説

152 AM，DM は正三角形の中線より

$$\mathrm{AM} = \mathrm{DM} = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

三角形 AMD に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$



$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって

$$\triangle\mathrm{AMD} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

153 BP $= x$ とおく。BP $=$ CP なので，△BPC に余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{x^2 + x^2 - 1}{2\cdot x\cdot x} = \frac{2x^2-1}{2x^2}$$

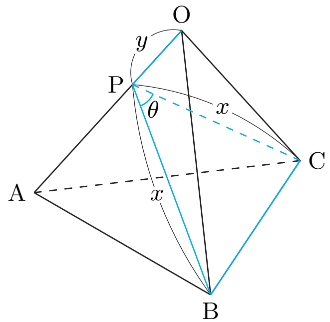
これと $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ より

$$\frac{2x^2-1}{2x^2} = \frac{5}{13}$$

$$26x^2 - 13 = 10x^2$$

$$x^2 = \frac{13}{16}$$

$$\therefore\quad \mathrm{BP} = x = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{4}}} \quad (\because\quad x > 0)$$



∠BOP $= 60^\circ$ なので，OP $= y$ とし，△OBP において余弦定理を用いると

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 = 1^2 + y^2 - 2\cdot 1\cdot y\cos 60^\circ$$

$$y^2 - y + \frac{3}{16} = 0$$

$$(4y-3)(4y-1) = 0$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP} = y = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{4}}} \quad \left(\because\quad y < \frac{1}{2}\right)$$

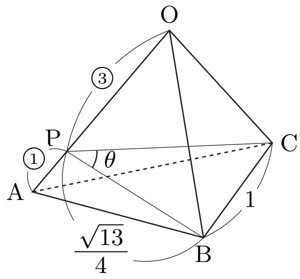
154 (1) 三角形 ABP に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BP}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+1^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{13}{16}$$

$$\therefore\quad \underline{\mathbf{BP}=\frac{\sqrt{13}}{4}}\quad (\because\quad \mathrm{BP}>0)$$

(2) $\mathrm{PC}=\mathrm{BP}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ であるから，三角形 PBC に余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{BP}^2+\mathrm{PC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PC}}=\underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}}$$



$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ であるから

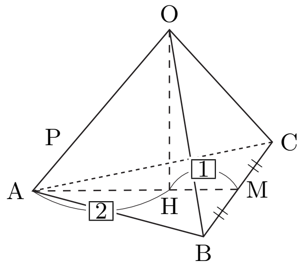
$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

よって，三角形 BPC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{12}{13}=\underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}}$$

(3) 点 O から三角形 ABC に垂線 OH をひくと，H は三角形 ABC の外心であり，三角形 ABC は正三角形より H は重心と一致する。よって，辺 BC の中点を M とすると，H は中線 AM 上にあって

$$\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\times1\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



このとき

$$\mathrm{OH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

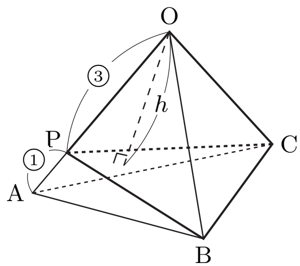
であるから，正四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin 60^\circ\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\underline{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}}}$$

(4) 四面体 OPBC の体積を V' とする。OP : PA = 3 : 1 より

$$V'=V\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{2}}{16}$$



また

$$V'=\frac{1}{3}\times S\times h=\frac{h}{8}$$

でもあるから

$$\frac{h}{8}=\frac{\sqrt{2}}{16}\qquad\therefore\quad h=\underline{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$$

2.12 球

問題

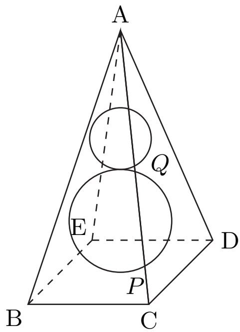
155 一辺の長さが a である正四面体 ABCD に外接する球の半径は $\boxed{}$ である。 （兵庫医科大）

156 図のように，1 辺の長さ 2 の正方形を底面とする正四角錐 ABCDE があり，その中にちょうどはいる 2 つの球 P，Q がある。球 P は正四角錐 ABCDE の底面および各側面に接し，球 Q は正四角錐 ABCDE の各側面に接している。さらに 2 つの球 P，Q は互いに接している。正方形 BCDE の面積と △ABC の面積が等しいとき，

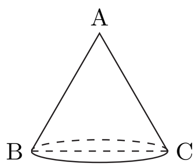
(1) 辺 AB の長さは $\boxed{}$ である。

(2) 球 P の半径は $\boxed{}$ である。

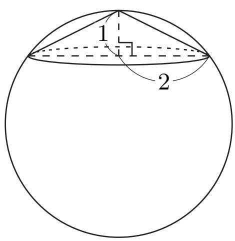
(3) 球 Q の体積は $\boxed{}$ である。



157 右の図は，線分 BC を直径とする円を底面とし，点 A を頂点とする直円錐である。AB = 6，BC = 6 のとき，この直円錐の中に入る球のうち，体積が最大のものを O とする。球 O の体積を求めよ。



158 右図のように，高さが 1，底面の半径が 2 の円すいの頂点と底面の周が，球に内接している。この球の体積を求めよ。

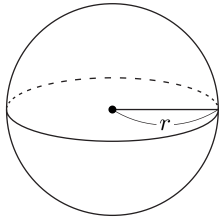


チェック・チェック

半径 r の球について

$$\text{体積 } V=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad \text{表面積 } S=4\pi r^2$$

です。あとは球の半径を求めるために立体の**切り口を工夫**します。



155 正四面体 ABCD を対称な 2 つの図形（立体）に分割すると，外接球の中心はこの切り口の上にあります。さらに，この切り口を対称な 2 つの図形（三角形）に分割すると，外接球の中心はこの切り口の上にあります。

156 2 球と側面との接点がどのように表れるか考えましょう。接点と 2 球の中心を含む平面による切り口を考えます。

157 頂点 A と直径 BC を含む平面による切り口を考えましょう。内接球の中心は切り口の三角形の内心となります。また，切り口は正三角形となるので，内心は重心に一致します。

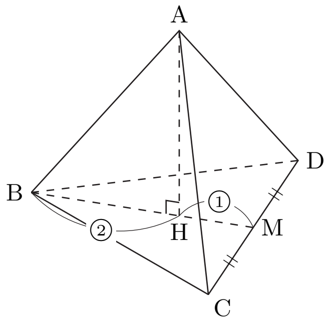
158 円錐の軸を含む平面で切れば，どこで切っても切り口は同じ形となります。

解答・解説

155 点Aから三角形BCDに垂線AHをひくと，AB = AC = ADよりHは三角形BCDの外心であり，三角形BCDは正三角形よりHは三角形BCDの重心と一致する。辺CDの中点をMとすると，Hは中線BM上にあるから

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3} \times a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \quad \mathrm{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$



外接球の中心をO，半径をRとすると

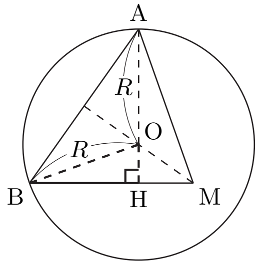
$$\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - R$$

よって，三平方の定理より

$$\mathrm{BH}^2 + \mathrm{HO}^2 = \mathrm{OB}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R\right)^2 = R^2$$

$$\therefore \quad R = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}a}}$$



別解 二等辺三角形MABにおいて，MOは∠AMBの2等分線だから

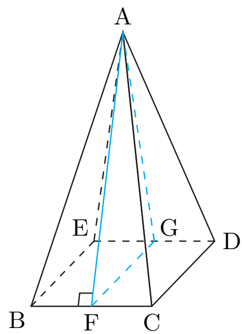
$$\mathrm{AO} : \mathrm{OH} = \mathrm{AM} : \mathrm{MH} = 3 : 1$$

$$\therefore \quad R = \mathrm{OA} = \frac{3}{4}\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

156 (1) 辺BCの中点をFとすると，△ABCの面積と正方形BCDEの面積が等しいので

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AF} = \mathrm{BC}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{AF} = 2 \cdot \mathrm{BC} = 4$$

よって　$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{17}}}$

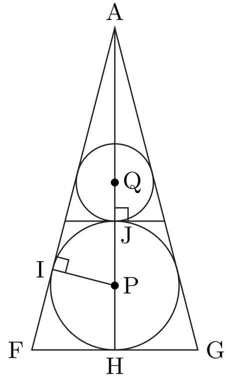


(2) EDの中点をGとし，**3点A，F，Gを通る平面による切り口**を考える。対称性より，2球の中心P，Qはこの平面上にある。次頁の図のように各点をとると

$$\mathrm{FH} = \frac{1}{2}\mathrm{FG} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

であり，また

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 - \mathrm{FH}^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$



球 P の半径を r とおき，さらに，$\triangle\mathrm{AFH} \backsim \triangle\mathrm{API}$ より

$$\mathrm{AF} : \mathrm{AP} = \mathrm{FH} : \mathrm{PI}$$

$$4 : (\sqrt{15} - r) = 1 : r$$

$$4r = \sqrt{15} - r \qquad \therefore \quad r = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}}$$

(3) $\mathrm{AJ} = \mathrm{AH} - 2r = \sqrt{15} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{5} = \dfrac{3}{5}\sqrt{15}$ より

$$\mathrm{AJ} : \mathrm{AH} = \frac{3}{5}\sqrt{15} : \sqrt{15} = 3 : 5$$

なので，球 Q，P の半径の比は

$$\mathrm{QJ} : \mathrm{PH} = 3 : 5$$

よって

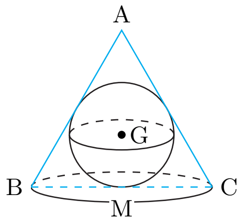
$$(\text{球 } Q \text{ の体積}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times (\text{球 } P \text{ の体積}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

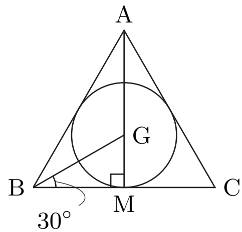
$$= \frac{3^2 \cdot 4\pi}{5^3} \times \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot 4\sqrt{15}}{5^5}\pi = \underline{\boldsymbol{\frac{108\sqrt{15}}{3125}\pi}}$$

157 体積が最大となるのは，球が直円錐に内接するときである。

頂点 A と直径 BC を含む平面による切り口を考える。$\triangle\mathrm{ABC}$ は 1 辺の長さが 6 の正三角形なので，内心と重心は一致し，球の中心 G は正三角形 ABC の重心である。BC の中点を M として，$\mathrm{GM} = \mathrm{BM}\tan 30^\circ = 3 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ なので

$$(\text{球 } O \text{ の体積}) = \frac{4}{3} \times \pi(\sqrt{3})^3 = \underline{\boldsymbol{4\sqrt{3}\pi}}$$





158 図のように，**円錐の頂点 A と球の中心 O を通る平面による切り口**を考える。球の半径を r とすると，$\mathrm{OH} = r - 1$，$\mathrm{OC} = r$ より，$\triangle\mathrm{OCH}$ に三平方の定理を用いると

$$r^2 = (r-1)^2 + 2^2 \qquad \therefore \quad r = \frac{5}{2}$$

よって，体積は $\dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \underline{\boldsymbol{\dfrac{125}{6}\pi}}$ である。