1　三角形の性質

1.1　角の 2 等分線

問題

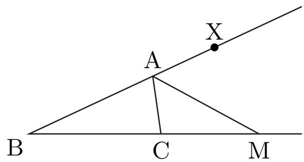
159 点 O を中心とする円 O の直交する二つの直径 PQ と RS に対して，OR の延長上に点 A を PA = PQ となるようにとる。PA と円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 OA の交点を B とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 点 M は線分 PA の中点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さの比 AP : PB と AR : RB を求めよ。

(3) 線分 PR は ∠APB の二等分線であることを証明せよ。　(鹿児島大)

160 AB > AC である △ABC について，点 M を辺 BC の延長上に AB : AC = BM : MC をみたすようにとる。また，右の図において，点 X は辺 BA の延長上の点とする。

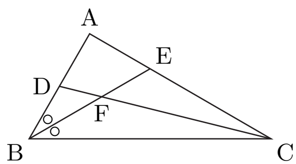


(1) 点 N を辺 AB 上に AC = AN をみたすようにとるとき，MA // CN であることを示せ。

(2) AM が ∠A の外角を二等分することを示せ。　(宮崎大　改)

161 (1) △ABC において，∠A の二等分線，∠A の外角の二等分線と直線 BC の交点をそれぞれ D，E とする。AB = 8，BD = 4，DC = 3 のとき，AC = $\boxed{}$，DE = $\boxed{}$ である。　(北星学園大)

(2) 右図において，AB : BC = 2 : 3，AD = DB，∠ABE = ∠CBE とし，三角形 BDF の面積を 5 とする。このとき，三角形 BCF の面積は $\boxed{}$，三角形 CEF の面積は $\boxed{}$ である。



(北海道工業大)

チェック・チェック

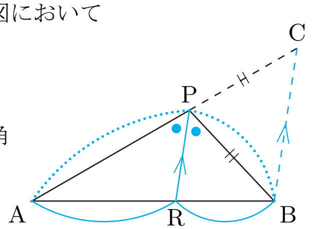
159 (1) まずは △APQ が正三角形であることを示しましょう。

(2)，(3) 内角の 2 等分線についての問題です。右図において

$$\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{BPR}$$
$$\iff \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AR} : \mathrm{RB}$$

が成り立ちます。

(2)，(3) により $\Longleftarrow$ が証明されます。二等辺三角形 PBC をつくれば $\Longrightarrow$ の成立もわかりますね。

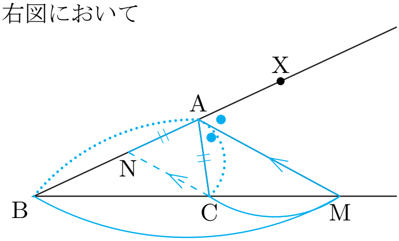


160 外角の 2 等分線についての問題です。右図において

$$\angle \mathrm{CAM} = \angle \mathrm{XAM}$$
$$\iff \mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BM} : \mathrm{MC}$$

が成り立ちます。

(1)，(2) により $\Longleftarrow$ が証明されます。二等辺三角形 ACN をつくれば $\Longrightarrow$ の成立もわかりますね。



161 (1) **159**，**160** で示した内角の 2 等分線，外角の 2 等分線の定理を用いる問題です。図をかきながら定理の適用を考えましょう。

(2) 三角形 BDF の面積がわかっているので

$$\triangle \mathrm{BCF} = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DF}} \triangle \mathrm{BDF}$$

が使えます。また

$$\triangle \mathrm{CEF} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}} \triangle \mathrm{CAD}$$

です。どちらも辺の比は BF，BE が ∠B の 2 等分線であることから求めることができます。

解答・解説

159 (1) OA は線分 PQ の垂直 2 等分線であるから

$$\mathrm{PA} = \mathrm{AQ}$$

である。条件

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PQ}$$

と合わせると，$\triangle\mathrm{APQ}$ は正三角形である。

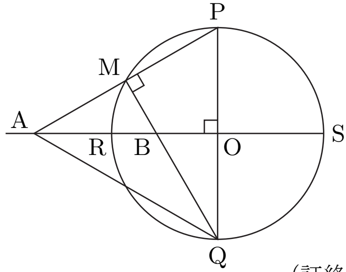
また，PQ は円 O の直径であるから

$$\angle\mathrm{PMQ} = 90^\circ$$

であり

$$\triangle\mathrm{AMQ} \equiv \triangle\mathrm{PMQ}$$

である。よって，M は線分 PA の中点である。



（証終）

(2) B は正三角形 APQ の中線 OA，MQ の交点，すなわち重心であるから

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AP} : \frac{2}{3}\mathrm{AP}\sin 60^\circ = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{3} : 1}}$$

また，$\mathrm{OP} = r$ とおくと

$$\mathrm{OB} = \frac{1}{3}\mathrm{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{OP} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

なので

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = (\mathrm{OA} - \mathrm{OR}) : (\mathrm{OR} - \mathrm{OB}) = (\sqrt{3}r - r) : \left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \underline{\boldsymbol{\sqrt{3} : 1}}$$

(3) (2) より

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} (= \sqrt{3} : 1)$$

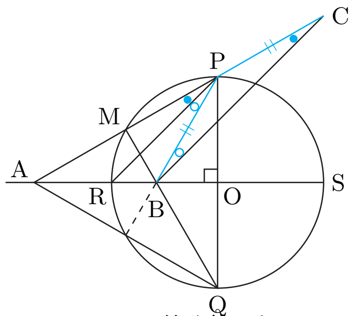
である。AP の延長上に点 C を $\mathrm{PB} = \mathrm{PC}$ となるようにとると，$\triangle\mathrm{PBC}$ は二等辺三角形となり $\angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PCB}$ である。

また，$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = \mathrm{AP} : \mathrm{PC}$ より

$$\mathrm{RP} \parallel \mathrm{BC}$$

であるから

$$\begin{cases} \angle\mathrm{APR} = \angle\mathrm{PCB} & \text{（同位角）} \\ \angle\mathrm{BPR} = \angle\mathrm{PBC} & \text{（錯角）} \end{cases}$$



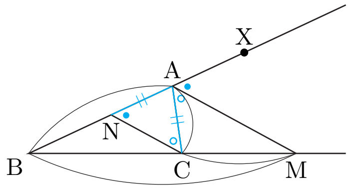
よって，$\angle\mathrm{APR} = \angle\mathrm{BPR}$ であり，線分 PR は $\angle\mathrm{APB}$ の 2 等分線である。　（証終）

160 (1) BM : MC = BA : AC = BA : AN

であるから

MA // CN ……①

である。 （証終）



(2) ①より

$$\begin{cases} \angle \mathrm{MAX} = \angle \mathrm{CNA} & \text{（同位角）} \\ \angle \mathrm{MAC} = \angle \mathrm{ACN} & \text{（錯角）} \end{cases}$$

また，AC = AN より，△ANC は二等辺三角形だから

$\angle \mathrm{ANC} = \angle \mathrm{ACN}$

したがって

$\angle \mathrm{MAX} = \angle \mathrm{MAC}$

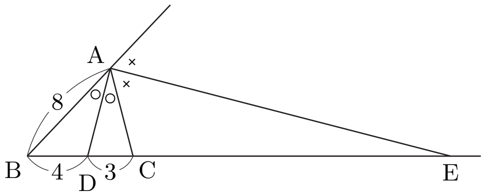
よって，AM は ∠A の外角を 2 等分している。 （証終）

161 (1) 線分 AD は ∠BAC の内角の 2 等分線だから

AB : AC = BD : DC

8 : AC = 4 : 3

∴ AC = **6**



線分 AE は ∠BAC の外角の 2 等分線だから

AB : AC = BE : EC

8 : 6 = (7 + CE) : CE

6(7 + CE) = 8CE ∴ CE = 21

よって

DE = DC + CE = 3 + 21 = **24**

(2) BF は ∠B の内角の 2 等分線であり，D は辺 AB の中点だから

DF : FC = BD : BC = 1 : 3

よって

△BCF = 3 × △BDF = 3 × 5 = **15**

次に，D は辺 AB の中点だから

△CAD = △CBD = 5 + 15 = 20

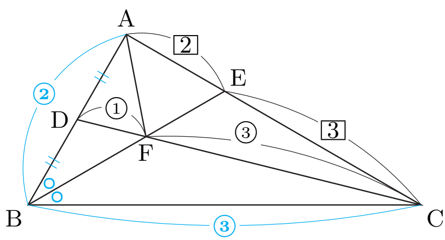
BE は ∠B の内角の 2 等分線だから

AE : EC = BA : BC = 2 : 3

よって

$$\triangle \mathrm{CEF} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \times \triangle \mathrm{CAD}$$

$$= \frac{9}{20} \times 20 = \mathbf{9}$$



1.2　三角形の五心

問題

162 (1) 次の定理を証明せよ。

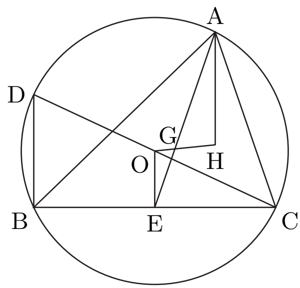
「三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，各中線はその交点によってそれぞれ 2 : 1 に内分される。」　(佐賀大)

(2) △ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を P とする。
AB = 5，BC = 6，CA = 3 のとき，BP = $\boxed{}$ である。また，これより
AI : IP = $\boxed{}$: $\boxed{}$ である。　(東京工芸大)

163 右図において，△ABC の外心を O，垂心を H とする。また，△ABC の外接円と直線 CO の交点を D，点 O から辺 BC にひいた垂線を OE とし，線分 AE と線分 OH の交点を G とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) AH = DB であることを示せ。

(2) 点 G は △ABC の重心であることを示せ。



(宮崎大)

164 三角形 ABC の垂心を H とし，頂点 A，B，C から対辺またはその延長への垂線の足をそれぞれ K，L，M とする。

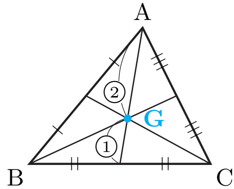
(1) 点 K が線分 BC(両端を除く) の上にあるならば，直線 AK は角 LKM を二等分することを証明せよ。

(2) 三角形 ABC が鋭角三角形ならば，点 H は三角形 KLM の内心であることを証明せよ。

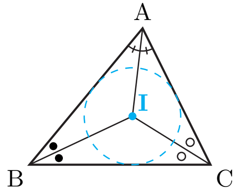
(3) 三角形 ABC が鈍角三角形のときは，点 H は三角形 KLM とどのような位置関係にあるか。　(愛知教育大)

チェック・チェック

三角形には重心，内心，外心，垂心，傍(ぼう)心の 5 つの心(しん)があります。

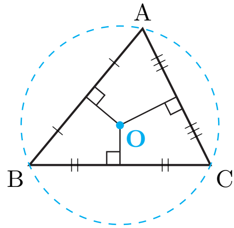


重心 G　3 つの中線の交点であり，G は各中線を 2 : 1 に内分します。



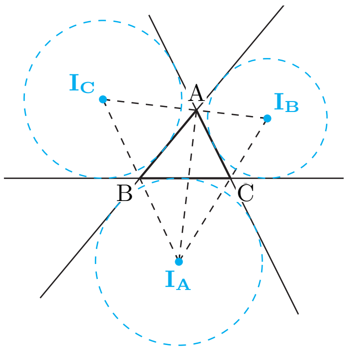
内心 I　各内角の 2 等分線の交点であり，I は内接円の中心です。

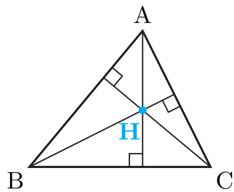
外心 O　各辺の垂直 2 等分線の交点であり，O は外接円の中心です。



垂心 H　各頂点から対辺に下ろした垂線の交点です。

傍心 I_A，I_B，I_C　1 つの内角と他の 2 つの外角の 2 等分線の交点です。傍心は 3 つあり，傍接円の中心です。





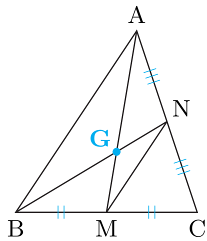
162　(1)　重心の確認です。3 本の中線が 1 点で交わることを示すには，1 本の中線に対する他の 2 本の中線の交点が一致することを示せばよいですね。
(2)　内心の確認です。

163　重心・外心・垂心に関する有名問題です。

164　(1) ∠BAC が鋭角，鈍角，直角の場合の場合分けが必要です。
(2)，(3) 三角形 KLM は三角形 ABC の垂足三角形とよばれています。

解答・解説

162 (1) 三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ L，M，N とする。



　このとき，中点連結定理より

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BA} \quad かつ\ 2\mathrm{MN} = \mathrm{BA}$$

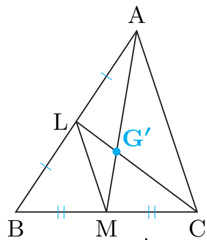
よって，中線 AM と BN の交点を G とすると

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GM} = \mathrm{BA} : \mathrm{MN} = 2 : 1$$

また，中点 AM と CL の交点を G′ とすると，同様にして

$$\mathrm{AG'} : \mathrm{G'M} = \mathrm{AC} : \mathrm{LM} = 2 : 1$$

ゆえに，G と G′ はともに線分 AM を 2 : 1 に内分する点であるから，この 2 点は一致する。



　したがって，3 つの中線は 1 点 G で交わり

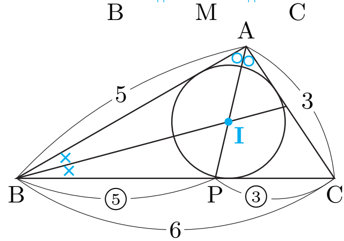
$$\mathrm{AG} : \mathrm{GM} = 2 : 1$$

である。同様に

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GN} = \mathrm{CG} : \mathrm{GL} = 2 : 1$$

であるから，G は各中線を 2 : 1 に内分する。　　（証終）

(2) AP は ∠A の内角の 2 等分線だから



$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 3$$

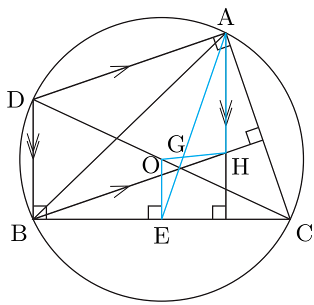
よって

$$\mathrm{BP} = \frac{5}{8}\mathrm{BC} = \frac{5}{8} \times 6 = \underline{\boldsymbol{\frac{15}{4}}}$$

また，BI は ∠B の内角の 2 等分線だから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{IP} = \mathrm{BA} : \mathrm{BP} = 5 : \frac{15}{4} = \underline{\mathbf{4 : 3}}$$

163 (1) CD は直径なので，DB ⊥ BC である。また，H は垂心なので AH ⊥ BC である。したがって



$$\mathrm{DB} \parallel \mathrm{AH}$$

である。

　同じく，AD ⊥ AC かつ BH ⊥ AC より

$$\mathrm{DA} \parallel \mathrm{BH}$$

である。

　よって，四角形 ADBH は平行四辺形であり，AH = DB である。　　（証終）

(2) $\triangle\mathrm{CEO} \backsim \triangle\mathrm{CBD}$ であり，E は線分 BC の中点より相似比は $1:2$ だから

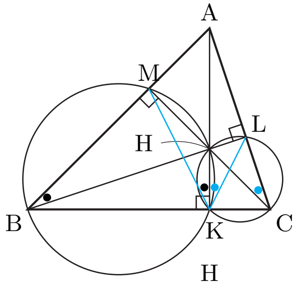
$$\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\mathrm{DB}$$

また，$\triangle\mathrm{AHG} \backsim \triangle\mathrm{EOG}$ であり

$$\mathrm{AG}:\mathrm{GE} = \mathrm{AH}:\mathrm{OE} = \mathrm{AH}:\frac{1}{2}\mathrm{DB} = \mathrm{AH}:\frac{1}{2}\mathrm{AH} = 2:1$$

G は中線 AE を $2:1$ に内分しているから $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心である。（証終）

164 (1) K が線分 BC の上にあるから，$\angle\mathrm{ABC}$，$\angle\mathrm{BCA}$ は鋭角である。



また，$\triangle\mathrm{ABL} \backsim \triangle\mathrm{ACM}$ より

$$\angle\mathrm{ABL} = \angle\mathrm{ACM} \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $\angle\mathrm{BAC}$ が鋭角のとき

$\angle\mathrm{HMB} = \angle\mathrm{HKB} = 90^\circ$ なので，2 点 M，K は線分 BH を直径とする円上の点であり，円周角の定理より　$\angle\mathrm{MKH} = \angle\mathrm{MBH} \quad \cdots\cdots ②$

同様に，2 点 L，K は線分 CH を直径とする円上の点であり　$\angle\mathrm{LCH} = \angle\mathrm{LKH} \quad \cdots\cdots ③$

以上，①，②，③より $\angle\mathrm{MKH} = \angle\mathrm{LKH}$ である。

(ii) $\angle\mathrm{BAC}$ が鈍角のとき

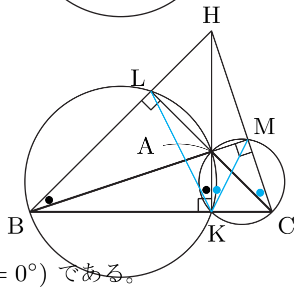
2 点 L，K は線分 AB を直径とする円上の点より

$$\angle\mathrm{AKL} = \angle\mathrm{ABL}$$

また，2 点 M，K は線分 AC を直径とする円上の点であり

$$\angle\mathrm{AKM} = \angle\mathrm{ACM}$$

よって，① より $\angle\mathrm{AKL} = \angle\mathrm{AKM}$ である。



(iii) $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ のとき

A，L，M，H が一致するので，$\angle\mathrm{AKL} = \angle\mathrm{AKM}\ (=0^\circ)$ である。

以上，(i)，(ii)，(iii) より，直線 AK は $\angle\mathrm{LKM}$ を 2 等分する。（証終）

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形ならば，L，M もそれぞれ線分 AC，AB 上にあるので，(1) と同様に，BL，CM はそれぞれ $\angle\mathrm{KLM}$，$\angle\mathrm{LMK}$ の 2 等分線である。

したがって，交点 H は $\triangle\mathrm{KLM}$ の内心である。（証終）

(3) $\angle\mathrm{ALH} = \angle\mathrm{AMH} = 90^\circ$ より，2 点 L，M は線分 AH を直径とする円上にあるから，$\angle\mathrm{HLM} = \angle\mathrm{HAM}$ である。また，$\angle\mathrm{BLA} = \angle\mathrm{BKA} = 90^\circ$ より，2 点 L，K は線分 AB を直径とする円上にあり，$\angle\mathrm{BLK} = \angle\mathrm{BAK}$ である。$\angle\mathrm{HAM} = \angle\mathrm{BAK}$ より，$\angle\mathrm{BLK} = \angle\mathrm{MLH}$。よって，LH は $\angle\mathrm{KLM}$ の外角の 2 等分線である。

同様にして，HM は $\angle\mathrm{KML}$ の外角の 2 等分線である。さらに，AK つまり HK は $\angle\mathrm{MKL}$ の内角の 2 等分線なので，**H は $\triangle$KLMの K に対する傍心である**。

1.3　メネラウス，チェバの定理

問題

165 三角形 ABC において，辺 AB の中点を Q とする。QC の中点を R とし，AR の延長線が辺 BC と交わる点を S とする。

(1) CS : SB の値を求めよ。

(2) AR : RS の値を求めよ。（昭和女子大）

166 三角形 OAB において辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，線分 BC の中点を M，直線 OM と辺 AB の交点を D とする。このとき $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \boxed{}$ である。また，三角形 OCM の面積を S_1，三角形 BDM の面積を S_2 とすると $\dfrac{S_1}{S_2} = \boxed{}$ である。（福岡大）

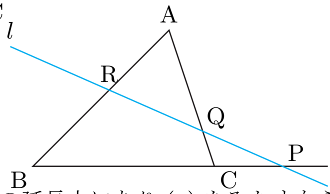
167 1 辺の長さが 9 の正三角形 ABC がある。辺 AB の上に AD = 4 となるように点 D を，辺 AC 上に AE = 6 となるように点 E をとる。このとき，BE と CD の交点を F とし，また AF の延長線と辺 BC の交点を G とする。CG の長さは $\boxed{}$ である。（明治大）

168 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点 T で交わっている。AR : RB = 2 : 1，BP : PC = $t : (1-t)$ とする。ただし $0 < t < 1$ である。

(1) $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}$ を t を用いて表せ。

(2) $t = \dfrac{1}{4}$ のとき，面積比 △ABC : △BRT を求めよ。（東北薬科大）

チェック・チェック



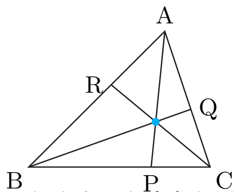
165 **メネラウスの定理**についての問題です。△ABC を直線 l で切ったときの辺 BC，CA，AB またはその延長との交点をそれぞれ P，Q，R とすると

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

が成り立つ。

逆に，3 点 P，Q，R のうち 1 個または 3 個が辺の延長上にあり $(*)$ をみたすならば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

166 **165** の応用問題です。面積比を線分の長さの比に置き換える工夫をしましょう。



167 **チェバの定理**についての問題です。△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1 \quad \cdots\cdots \ (**)$$

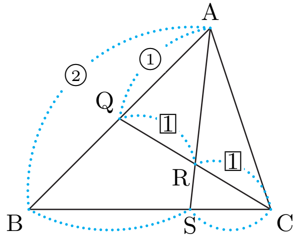
が成り立つ。

逆に，辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ 3 点 P，Q，R があり $(**)$ をみたすならば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

168 **167** の応用問題です。(2) は △TAB，△TBC，△TCA の面積比を求めることから始めましょう。

解答・解説

165 (1) メネラウスの定理より



$$\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AQ}}\cdot\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}=1$$

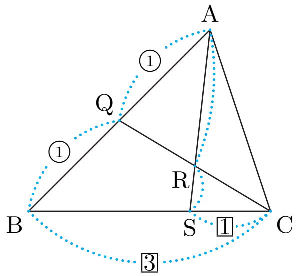
$$\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SB}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$\therefore$ 　CS : SB = $\underline{\mathbf{1 : 2}}$

(2) (1) より

$$\mathrm{SC}:\mathrm{CB}=1:(1+2)=1:3$$

であり，右図を得る。メネラウスの定理より

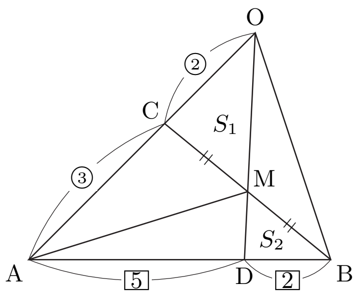


$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}\cdot\frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$\therefore$ 　AR : RS = $\underline{\mathbf{3 : 1}}$

166 メネラウスの定理より



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{5}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\underline{\mathbf{\frac{5}{2}}}$$

AD : DB = 5 : 2 より，右図を得る。

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CO}}=1$$

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$\therefore$ 　OM : MD = 7 : 3

∠OMC = ∠BMD より

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{MC}}{\mathrm{MD}\cdot\mathrm{MB}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}}=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1}=\underline{\mathbf{\frac{7}{3}}}$$

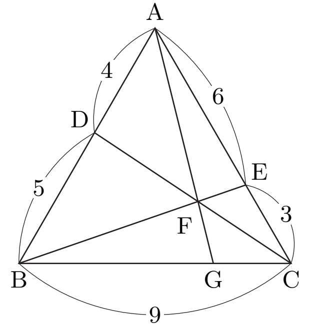
167 チェバの定理より

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{3}{6}=1$$

$$\frac{BG}{GC}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\quad BG:GC=5:2$$



よって

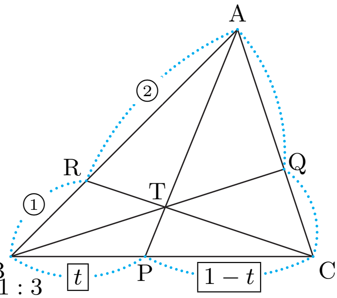
$$CG=9\times\frac{2}{7}=\underline{\boldsymbol{\frac{18}{7}}}$$

168 (1) チェバの定理より

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}=1$$

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

$$\therefore\quad \frac{CQ}{QA}=\underline{\boldsymbol{\frac{1-t}{2t}}}$$



(2) $t=\dfrac{1}{4}$ のとき

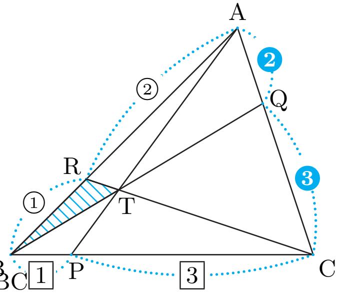
$$BP:PC=t:(1-t)=\frac{1}{4}:\left(1-\frac{1}{4}\right)=1:3$$

$$CQ:QA=(1-t):2t=3:2$$

より，右図を得る。

$$\triangle TAB:\triangle TCA=BP:PC$$
$$=1:3\ (=2:6)$$

$$\triangle TBC:\triangle TCA=BR:RA$$
$$=1:2\ (=3:6)$$



であるから

$$\triangle TAB:\triangle TBC:\triangle TCA=2:3:6$$

$$\therefore\quad \triangle TAB=\frac{2}{2+3+6}\triangle ABC=\frac{2}{11}\triangle ABC$$

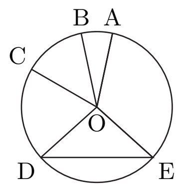
$\triangle BRT=\dfrac{1}{3}\triangle TAB$ より

$$\triangle ABC:\triangle BRT=\triangle ABC:\frac{1}{3}\times\frac{2}{11}\triangle ABC=\underline{\mathbf{33:2}}$$

2　円の性質

2.1　円周角

問題



169 円周上に点 A，B，C，D，E があり，円周をこれらの点で区切って得られる弧 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EA}$ の長さは弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さのそれぞれ 2 倍，3 倍，4 倍，5 倍となっている。

円の中心を O とするとき，$\angle AOB = \boxed{}$ であり，$\angle AED = \boxed{}$ である。（北海道工業大）

170 $\triangle ABC$ において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ，L，M，N とする。頂点 A から辺 BC またはその延長上に下ろした垂線を AH とする。次を証明せよ。

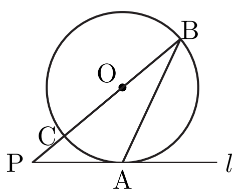
(1) $\angle LHN = \angle A$

(2) 4 点 L，M，N，H は同一円周上にある（鳴門教育大）

171 $\triangle ABC$ において，$\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 3 : 1$ であり，3 点 A，B，C を通る円 O の中心を O とする。線分 AO の延長と円 O との交点を D とする。円 O において弦 BC と平行に別の弦 EF を引く。ただし，EF は線分 OD と交わり，弧 BD 上に点 E がくるような位置にあるものとする。

(1) $\angle BAD$ の大きさを求めよ。

(2) $\angle BAE = \angle CAF$ であることを証明せよ。（北星学園大）



172 図のように，直線 l は中心を O とする円と点 A において接している。また，l 上の点 P と O を通る直線と円との交点を図のように B，C とし，$\angle PAB = 115°$ であるとする。このとき

$\angle ABC = \boxed{}°$，$\angle APC = \boxed{}°$

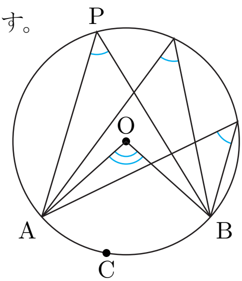
である。（金沢工業大）

チェック・チェック

169 O を中心とする円周上の弧は両端の点 A，B を決めただけでは 1 つには定まりません。A，B と異なる第 3 の点 C を設定して，弧 ACB と表すことにより 1 つに定まります。ただし，弧 AB と表したときは，ふつうは小さい方の弧（これを劣弧といいます）を示します。

右図において，∠AOB を弧 AB に対する**中心角**といいます。

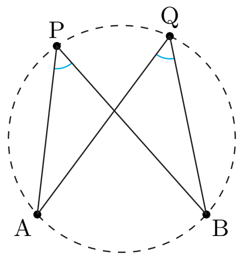
C を含まない弧 AB 上の A，B 以外の点 P に対して，∠APB を弧 AB に対する**円周角**といいます。円周角と中心角については，次の**円周角の定理**が重要です。



1 つの弧に対する**円周角の大きさは一定**であり，その弧に対する**中心角の大きさの半分**である。

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$

170 **円周角の定理の逆**も成り立ちます。すなわち



4 点 A，B，P，Q について，点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあるとき

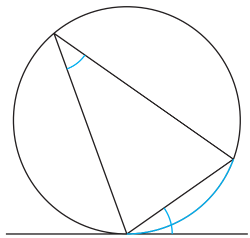
$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

ならば，4 点 A，B，P，Q は同一円周上にある。

171 円周角の定理の応用問題です。

172 接線と弦のつくる角について次の定理があります。

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



これを**接弦定理**といいます。

解答・解説

169 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DE} : \overset{\frown}{EA} = 1:2:3:4:5$ より，$\angle AOB = \theta$ とすると
$\angle BOC = 2\theta$，　$\angle COD = 3\theta$，　$\angle DOE = 4\theta$，　$\angle EOA = 5\theta$

よって

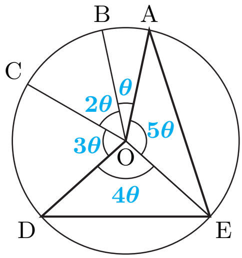
$$\theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta + 5\theta = 360^\circ$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \theta = \underline{\mathbf{24^\circ}}$$

また

$$\angle AED = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}(\theta + 2\theta + 3\theta)$$

$$= \underline{\mathbf{72^\circ}}$$



170 (1) $\angle AHB = 90^\circ$ より，H は辺 AB を直径とする円周上にあるから

$$LH = LA$$

$$\therefore \quad \angle LHA = \angle LAH \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\angle AHC = 90^\circ$ より，H は辺 AC を直径とする円周上にあるから

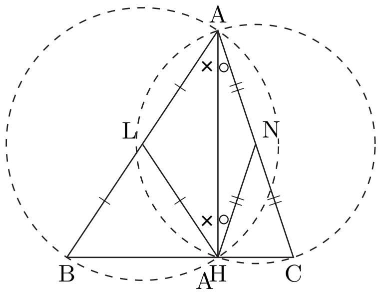
$$NH = NA$$

$$\therefore \quad \angle NHA = \angle NAH \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$\angle LHN = \angle A$$

（証終）



(2) 中点連結定理より

$$MN \mathbin{/\!/} AL \quad \text{かつ} \quad MN = \frac{1}{2}AB = AL$$

したがって

四角形 MNAL は平行四辺形

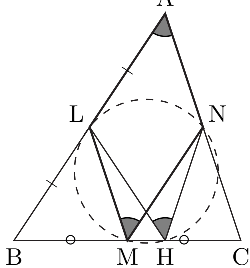
であることがわかり

$$\angle A = \angle LMN$$

これと (1) の結果から

$$\angle LMN = \angle LHN$$

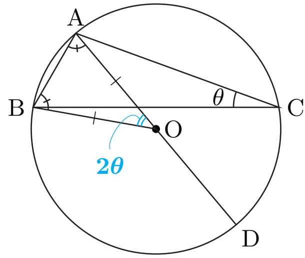
よって，円周角の定理の逆より，4 点 L，M，N，H は同一円周上にある。　（証終）



171 (1) $\angle C = \theta$ とおくと，$\angle A = 5\theta$，$\angle B = 3\theta$ であり

$$5\theta + 3\theta + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 20^\circ$$



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対して円周角の定理より

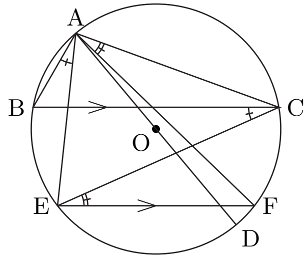
$$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

三角形 OAB は OA = OB の二等辺三角形だから，
求める $\angle BAD$ の大きさは

$$\angle BAD = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \underline{\mathbf{70^\circ}}$$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ に対して円周角の定理より

$$\angle BAE = \angle BCE \quad \cdots\cdots①$$



$\overset{\frown}{\mathrm{CF}}$ に対して円周角の定理より

$$\angle CAF = \angle CEF \quad \cdots\cdots②$$

BC // EF より

$$\angle BCE = \angle CEF \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③ より

$$\angle BAE = \angle CAF$$

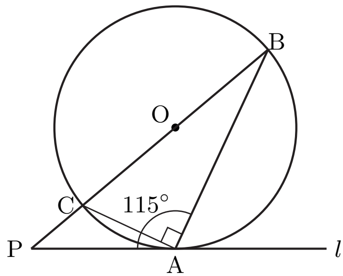
（証終）

172 線分 BC は円 O の直径だから

$$\angle CAB = 90^\circ$$

これより

$$\begin{aligned}\angle PAC &= \angle PAB - \angle CAB \\ &= 115^\circ - 90^\circ \\ &= 25^\circ\end{aligned}$$



接弦定理より

$$\angle ABC = \angle PAC = \underline{\mathbf{25}}^\circ$$

したがって

$$\begin{aligned}\angle APC &= 180^\circ - \angle PAB - \angle ABC \\ &= 180^\circ - 115^\circ - 25^\circ \\ &= \underline{\mathbf{40}}^\circ\end{aligned}$$

2.2　円に内接する四角形

問題

173 三角形 ABC の外心を O とし，点 G は，外接円 O の A を含まない弧 BC 上を動くとする。G から直線 AB，BC，CA に垂線をひき，AB，BC，CA との交点をそれぞれ D，E，F とする。$\angle A < 90°$ の場合に 3 点 D，E，F の位置関係を調べよう。

4 点 G, E, B, D は

$$\angle \mathrm{GDB} = \angle \boxed{\text{アイウ}} = 90°$$

であるから，同一円周上にあり，したがって

$$\angle \mathrm{BED} = \angle \boxed{\text{エオカ}} \quad \cdots\cdots ①$$

同じようにして，4 点 G，C，F，E も同一円周上にあるので

$$\angle \mathrm{CEF} = \angle \boxed{\text{キクケ}} \quad \cdots\cdots ②$$

さらに，四辺形 ABGC は円 O に内接するから

$$\angle \mathrm{DBG} = \angle \mathrm{GCF}$$

これと $\angle \mathrm{BDG} = \angle \mathrm{GFC} = 90°$ から $\triangle \mathrm{BGD} \backsim \triangle \mathrm{CGF}$ となり

$$\angle \mathrm{BGD} = \angle \mathrm{CGF} \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③から $\angle \mathrm{BED} = \angle \boxed{\text{コサシ}}$ が成り立つ。したがって，$\angle \mathrm{DEF} = 180°$ となり，D，E，F は一直線上にある。　（センター試験　改）

174 平面上に円 S と 6 点 A，B，C，D，E，F がある。A，B，C は S 上の異なる 3 点で，この順番で反時計回りに並んでいる。線分 AB を A の側に延長した半直線上に点 D がある。$\angle \mathrm{CAD}$ を二等分する直線 l と円 S は異なる 2 点で交わり，それらは A と E である。さらに，E は C を含まない S 上の弧 AB 上にある。また，l は線分 BC を C の側に延長した半直線と交わり，その交点が F である。

(1) 題意にしたがって，円 S，三角形 ABC および点 D，E，F を描け。

(2) 三角形 ACF と三角形 AEB が相似であることを証明せよ。

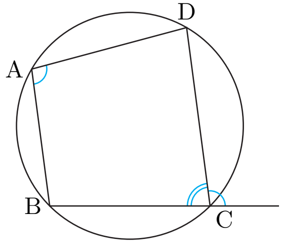
(3) $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{EF} = \mathrm{EB} \cdot \mathrm{BF}$ となることを証明せよ。　（高知大）

チェック・チェック

173 円に内接する四角形については

・一組の向かい合う内角の和は 180° である。
・また，1 つの内角はそれに向かいあう内角の外角に等しい。

が成り立ちます。



174 (1) 図は大きめにかきましょう。ミスが減ります。

(2) 2 つの三角形が相似であるための条件として

(i) 3 辺の比が等しい
(ii) 2 辺の比とその間の角が等しい
(iii) 2 角が等しい

がありますが，ここでは (iii) を考えてみましょう。

(3) 目標の関係式より，三角形 BEF と三角形 AEB の関係を調べることになりますね。

解答・解説

173 $\angle \mathrm{GDB} = \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{GEB}}} = 90^\circ$

であるから，G，E，B，D は線分 BG を直径とする円周上にある。したがって，円周角の定理より

$\angle \mathrm{BED} = \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{BGD}}}$ ……①

同様にして，4 点 G，C，F，E も同一円周上にあるので

$\angle \mathrm{CEF} = \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{CGF}}}$ ……②

さらに，四辺形 ABGC は円 O に内接するから，$\angle \mathrm{ABG} + \angle \mathrm{GCA} = 180^\circ$ であり

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{DBG} &= 180^\circ - \angle \mathrm{GCA} \\ &= \angle \mathrm{GCF} \end{aligned}$$

これと $\angle \mathrm{BDG} = \angle \mathrm{GFC} = 90^\circ$ から

$\triangle \mathrm{BGD} \backsim \triangle \mathrm{CGF}$

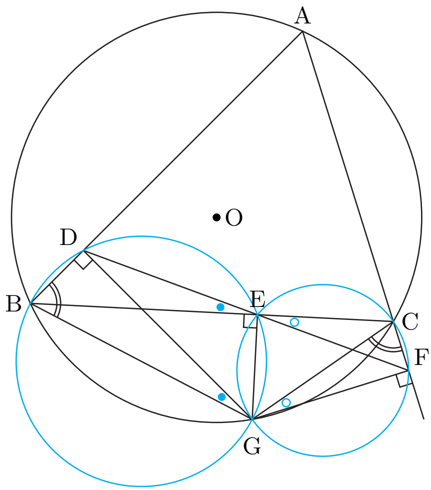
となり

$\angle \mathrm{BGD} = \angle \mathrm{CGF}$ ……③

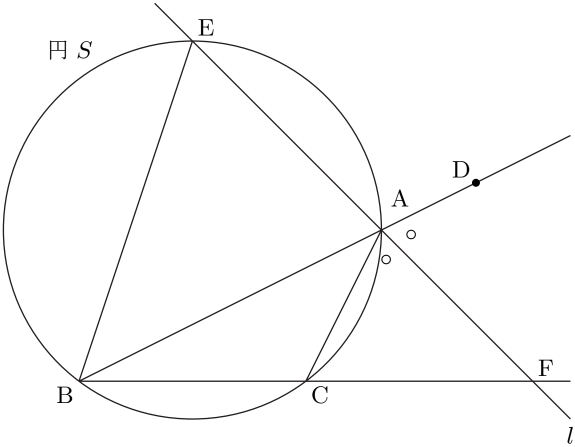
①，②，③から

$\angle \mathrm{BED} = \angle \mathrm{BGD} = \angle \mathrm{CGF} = \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{CEF}}}$

したがって，$\angle \mathrm{DEF} = 180^\circ$ となり，D，E，F は一直線上にある。



174 (1) 下図 のようになる。



(2) $\angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{FAD}$, $\angle \mathrm{FAD} = \angle \mathrm{EAB}$ より

$$\angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{EAB} \quad \cdots\cdots ①$$

また，四角形 AEBC は円に内接するから，$\angle \mathrm{AEB} + \angle \mathrm{ACB} = 180^\circ$ であり

$$\angle \mathrm{AEB} = 180^\circ - \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ACF} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より三角形 ACF と三角形 AEB は
2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle \mathrm{ACF} \backsim \triangle \mathrm{AEB}$$ （証終）

(3) 三角形 ACF と三角形 BEF において，
$\angle \mathrm{F}$ が共通であることと ② から

$$\triangle \mathrm{ACF} \backsim \triangle \mathrm{BEF}$$

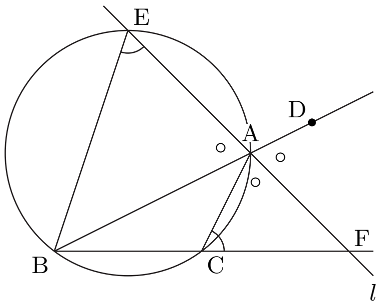
(2) の結果と合わせて

$$\triangle \mathrm{BEF} \backsim \triangle \mathrm{AEB}$$

したがって

$$\mathrm{EF} : \mathrm{BF} = \mathrm{EB} : \mathrm{AB}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AB} \cdot \mathrm{EF} = \mathrm{EB} \cdot \mathrm{BF}$$ （証終）



2.3　共通接線

問題

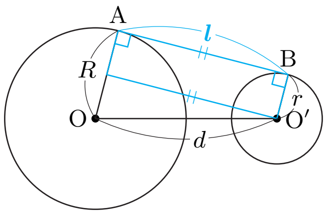
175 半径 2 の円 O と半径 1 の円 O' が点 P において外接している。共通外接線が円 O，O' と接する点をそれぞれ A，B とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の長さを求めよ。

(2) △PAB の面積を求めよ。　(滋賀大)

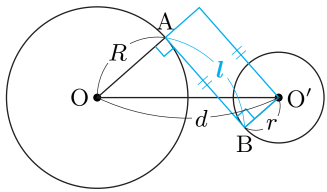
チェック・チェック

175 一般の位置にある 2 円の共通接線の長さ l については下図を参考にしてください。



共通外接線

$$l = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$$

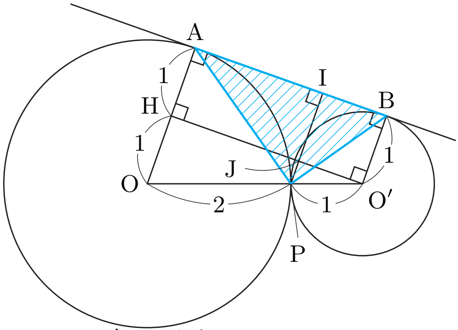


共通内接線

$$l = \sqrt{d^2 - (R+r)^2}$$

解答・解説

175 (1) O′ から AO へ下ろした垂線の足を H とおくと，△OO′H は直角三角形であり



$$\begin{aligned} OH &= OA - HA \\ &= OA - O'B \\ &= 2 - 1 = 1 \\ OO' &= OP + PO' \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad AB &= HO' \\ &= \sqrt{OO'^2 - OH^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 1^2} = \underline{\boldsymbol{2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(2) P から AB へ下ろした垂線の足を I，PI と O′H の交点を J とおくと，△O′PJ ∽ △O′OH であり，相似比は 1 : 3 である。したがって

$$PJ = \frac{1}{3}OH = \frac{1}{3} \qquad \therefore\quad PI = PJ + JI = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

したがって，△PAB の面積は $\displaystyle \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PI = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{4}{3} = \underline{\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}}}$

2.4　方べきの定理

問題

176 次の命題を，三角形の相似を利用して 証明せよ。

円周上に 3 点 A, B, T があり，T での接線と直線 AB とが点 C で交わるとき，$\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}=\mathrm{CT}^2$ が成り立つ。

（愛知教育大　改）

177 三角形 ABC の辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，辺 AC を $3:5$ に内分する点を E とする。4 点 B，C，E，D が同一円周上にあるとき，辺 AB と辺 AC の長さの比 $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ を求めよ。（岩手大）

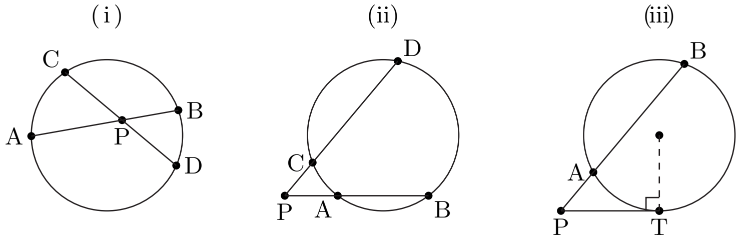
178 $\mathrm{AB}=10$，$\mathrm{BC}=9$，$\mathrm{AC}=8$ である三角形 ABC がある。$\angle\mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D，直線 AD と三角形 ABC の外接円との A 以外の交点を E とする。

(1) $\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}$ の値を求めよ。

(2) $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}$ の値を求めよ。（和歌山大）

チェック・チェック

円周上にない点 P を通る直線と円との 2 交点を A，B とおくと，長さの積 PA・PB は直線の引き方によらず一定な値となります（**方べきの定理**）。この値をこの円に関する点 P の方べきといいます。



(i) $\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$
(ii) $\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$
(iii) $\mathbf{PA \cdot PB = PT^2}$

176 (iii) のタイプの方べきの定理の証明です。証明には接弦定理を使います。

177 (ii) のタイプの方べきの定理を使います。

178 (1) (i) のタイプの方べきの定理を使います。
(2) BE・CE に関係した量として △EBC の面積を考えてみましょう。

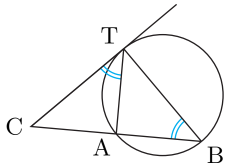
解答・解説

176 接線と弦 TA のなす角については，接弦定理より $\angle \mathrm{ATC} = \angle \mathrm{TBC}$ が成り立つから

$$\triangle \mathrm{CAT} \backsim \triangle \mathrm{CTB}$$

$$\therefore \quad \mathrm{CA} : \mathrm{CT} = \mathrm{CT} : \mathrm{CB}$$

よって，$\mathrm{CA} \cdot \mathrm{CB} = \mathrm{CT}^2$ が成り立つ。　（証終）



177 方べきの定理より

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{AB} = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{AC}$$

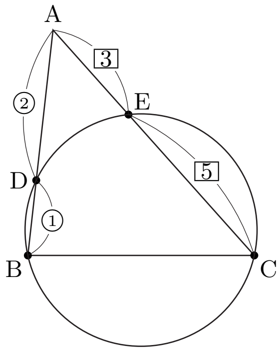
$$\frac{2}{3}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AB} = \frac{3}{8}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{AC}$$

$$\mathrm{AB}^2 = \frac{9}{16}\mathrm{AC}^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{AB} = \frac{3}{4}\mathrm{AC}$$

よって

$\underline{\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 3 : 4}$



178 (1) 方べきの定理より $\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ で，AD は $\angle\mathrm{A}$ の 2 等分線なので

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=10:8=5:4$$

$$\therefore\quad \mathrm{BD}=\frac{5}{9}\mathrm{BC}=5,\quad \mathrm{CD}=\frac{4}{9}\mathrm{BC}=4$$

したがって

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}=5\times 4=\underline{\mathbf{20}}$$

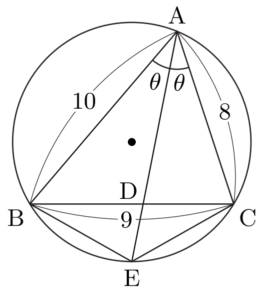
(2) $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}$ より，これを θ とおくと，四角形 ABEC は円に内接するので

$$2\theta+\angle\mathrm{BEC}=180^\circ$$

である。$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{EBC}=\mathrm{AD}:\mathrm{DE}$ なので

$$\left\{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\sin 2\theta\right\}:\left\{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}\sin(180^\circ-2\theta)\right\}=\mathrm{AD}:\mathrm{DE}$$

$$\therefore\quad 80:(\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE})=\mathrm{AD}:\mathrm{DE}$$



(1) より，$\mathrm{DE}=\dfrac{20}{\mathrm{AD}}$ であるから

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}=80\times\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}=80\times\frac{20}{\mathrm{AD}^2}$$

$\mathrm{AD}=x\ (>0)$ とおき，$\triangle\mathrm{ABD}$ に対して余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{10^2+x^2-5^2}{2\times 10\times x}$$
$$=\frac{75+x^2}{20x}\quad\cdots\cdots①$$

$\triangle\mathrm{ACD}$ に対して余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{CD}^2}{2\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{8^2+x^2-4^2}{2\times 8\times x}$$
$$=\frac{48+x^2}{16x}\quad\cdots\cdots②$$

①，② より

$$\frac{75+x^2}{20x}=\frac{48+x^2}{16x}$$

$$4(75+x^2)=5(48+x^2)$$

$$\therefore\quad \mathrm{AD}^2=x^2=60$$

よって

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}=80\times\frac{20}{60}=\underline{\mathbf{\frac{80}{3}}}$$

3　空間図形

3.1　三垂線の定理

問題

179 相交わる 2 平面 P，Q がある。その交線 l 上の 1 点 A を通って，平面 Q 上に直線 AB を引く。いま，平面 P と平面 Q とのなす角を α，直線 AB と直線 l とのなす角を β，また，直線 AB と平面 P とのなす角を γ とおくと

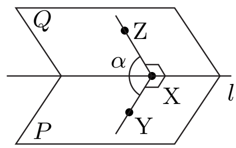
$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，α，β，γ はいずれも正の鋭角とする。

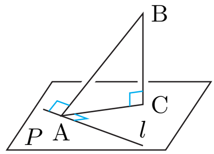
(神戸大)

チェック・チェック

179 **2 平面 P，Q のなす角 α** とは，P，Q の交線 l 上に点 X をとり，P，Q 上に $\mathrm{XY}\perp l$，$\mathrm{XZ}\perp l$ となるように垂線 XY，XZ を引くときの **∠YXZ** のことです。

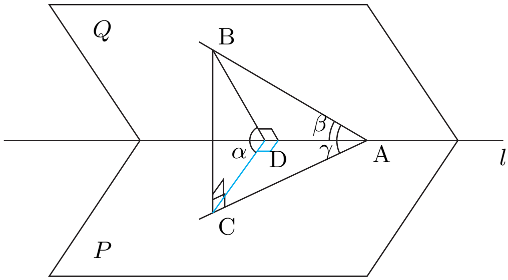


また，平面 P 上に直線 l があり，l 上に点 A，P 上にない点 B，l 上にない P 上の点 C について，次の**三垂線の定理**が成り立ちます。



(i) $\mathrm{BC}\perp P$ かつ $\mathrm{AB}\perp l$ ならば $\mathrm{AC}\perp l$
(ii) $\mathrm{BC}\perp P$ かつ $\mathrm{AC}\perp l$ ならば $\mathrm{AB}\perp l$
(iii) $\mathrm{AB}\perp l$ かつ $\mathrm{AC}\perp l$ かつ $\mathrm{AC}\perp\mathrm{BC}$ ならば $\mathrm{BC}\perp P$

解答・解説



179 点 B から平面 P および直線 l にそれぞれ垂線 BC，BD を下ろす。すると，三垂線の定理より

$$\mathrm{CD} \perp l$$

となるから

$$\angle\mathrm{BDC} = \alpha$$

このとき，三角形 BDC において，$\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD}\sin\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

また，三角形 ABD において，$\angle\mathrm{DAB} = \beta$，$\angle\mathrm{BDA} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AB}\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

さらに，三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = \gamma$，$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\sin\gamma \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より

$$\sin\gamma = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BD}\sin\alpha}{\frac{\mathrm{BD}}{\sin\beta}} = \sin\alpha\sin\beta$$

（証終）

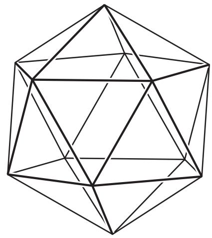
3.2　多面体

問題

180 (1) 体積が 1 の正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体の体積は $\boxed{}$ である。（早稲田大）

(2) 一辺の長さが a の正八面体の体積と，この正八面体に内接する球，外接する球の半径を求めよ。（名古屋市立大）

181 一辺の長さが 1 の正二十面体の 1 つの辺を AB とし，その辺の中点を M とする。さらに，外接球の中心を O とする。



3 点 A，B，O を通る平面でこの二十面体を切ったとき，切り口として得られる六角形の頂点を順に A，B，C，D，E，F とする。このとき，C，F はこの正二十面体の辺の中点であり，3 つの線分 OM，OC，OF の長さは等しい。次の各問いに答えよ。

(1) 線分 OM の長さ x を求めよ。

(2) 外接球の半径を l とするとき，l^2 を求めよ。

(3) α，β をこの正二十面体の 1 つの辺をはさんで隣り合う 2 つの面とする。O から α，β に下ろした垂線の足をそれぞれ G，H とすると，それらは各面の重心である。$\theta = \angle\mathrm{GOH}$ とするとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$ を求めよ。（山形大　改）

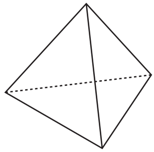
チェック・チェック

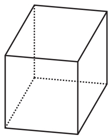
　次の 2 つの性質をもつ多面体を**正多面体**といいます。

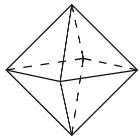
　〔1〕各面はすべて合同な多角形である

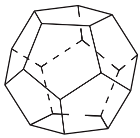
　〔2〕各頂点に集まる面の数はすべて等しい

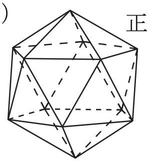
正多面体は次の 5 種類しかないことが知られています。


正四面体


正六面体（立方体）


正八面体


正十二面体


正二十面体

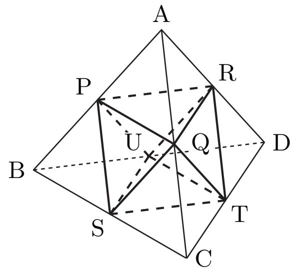
180 (1) 各辺の中点を結んでできる小さな 4 つの正四面体を取り除くと正八面体が得られます。

(2) 内接球，外接球の中心は正八面体を対称な 2 つの図形に分割する平面上にあります。

181 まずは切り口として得られる六角形を図示しましょう。どんな六角形になりますか。

解答・解説

180 (1) 体積が 1 の正四面体を四面体 ABCD とし，辺 AB，AC，AD，BC，CD，DB の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。

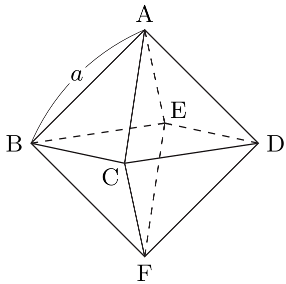


四面体 APQR は正四面体であり，正四面体 ABCD と四面体 APQR の相似比は 2 : 1 であるから，四面体 APQR の体積は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{1}{8}$$

四面体 BPSU，四面体 CQST，四面体 DQRT についても同様である。
したがって，求める正八面体の体積は

$$1 - 4 \times \frac{1}{8} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$



(2) 正八面体の頂点を A，B，C，D，E，F とする。このとき，四角形 ABFD は一辺の長さが a の正方形で，対角線の交点を H とすると

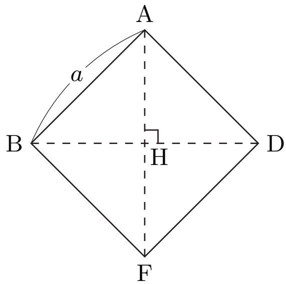
$$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

よって，四角錐 ABCDE の体積は

$$\frac{1}{3}\times a^2\times\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

だから，正八面体の体積 V は

$$V=2\times\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}}$$



内接する球の半径を r とすると

$$V=\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})\times r\times 8$$

でもあるから

$$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ\times r\times 8$$

$$\therefore\quad r=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{6}a}}$$

また，外接する球の半径を R とする。外接球の中心は，面 ABFD と面 ACFE の交線 AF 上にあり，かつ，面 ABFD と面 BCDE の交線 BD 上にあるから H である。すなわち，R は線分 AH の長さと等しいから

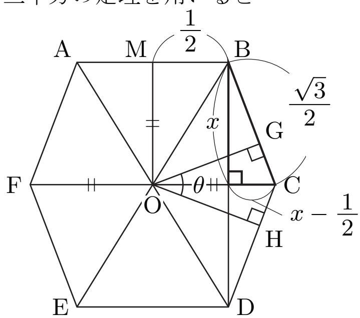
$$R=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}a}}$$

181 (1) BC を斜辺とする直角三角形において三平方の定理を用いると

$$x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$2x^2-x-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore\quad \mathrm{OM}=x=\underline{\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}}$$



(2) 外接円の半径 l は OB の長さに等しいから

$$l^2=x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

(3) 2 点 B，C を含む面を α，2 点 C，D を含む面を β とすると

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}}}$$