1 整数の性質

1.1 倍数・約数

問題

182 5040 を素因数分解すると

$$5040 = 2^{\square} \times 3^{\square} \times \boxed{} \times \boxed{}$$

5040 の正の約数は $\boxed{}$ 個ある。また，5040 の正の約数の和は $\boxed{}$ である。 (杏林大)

183 正の約数の個数が 18 である最小の自然数 m を求めよ。

(産業医科大)

184 30 の階乗の素因数分解を

$$30! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \cdots \times 23^i \times 29^j$$

と表したとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$c = \boxed{}$ である。また，30! は末尾から続けて $\boxed{}$ 個の 0 が並ぶ。 (玉川大)

チェック・チェック

182 整数 N が $N=a^pb^qc^r$ と素因数分解されるとき，N の約数は

$$a^xb^yc^z\ (0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq q,\ 0 \leqq z \leqq r)$$

の形をしており，N のすべての約数は

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$$

を展開したときの各項として現れます。したがって，N の約数の個数は

$$(p+1)(q+1)(r+1)\ 個$$

であり，N の約数の総和は

$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

です。

183 $18=3^2\times 2$ と素因数分解できるので，18 は

$$18,\ 9\times 2,\ 6\times 3,\ 3\times 3\times 2$$

と分解できます。これより自然数 m の正の約数の個数が 18 となるのは

$$a^{17},\ a^8b^1,\ a^5b^2,\ a^2b^2c^1$$

の 4 通りに絞られます。

184 30! に含まれる素因数 3 の個数 b を具体的に求めてみましょう。素因数 3 を含む数は $\dfrac{30}{3}=10$ 個あり，素因数 3 の 1 つを○で表すと

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30		
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	⋯	10 個
		○			○			○		⋯	3 個
								○		⋯	1 個

であり，$10+3+1=14$ 個です。

　また，末尾に並ぶ 0 の個数は 30! に含まれる素因数 2 と 5 の個数で決まります。

解答・解説

182 5040 を素因数分解すると

$$5040 = 2^{\mathbf{4}} \times 3^{\mathbf{2}} \times \underline{\mathbf{5}} \times \underline{\mathbf{7}}$$

したがって，正の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 2 = \underline{\mathbf{60}}\text{（個）}$$

また，正の約数の和は

$$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)(7^0+7^1)$$
$$= 31 \times 13 \times 6 \times 8 = \underline{\mathbf{19344}}$$

183 $18 = 9 \times 2 = 6 \times 3 = 3 \times 3 \times 2$ より，約数が 18 個ある自然数は次のように素因数分解される。

(i) a^{17} の形のとき，最小な自然数は $2^{17}(=131072)$

(ii) a^8b^1 の形のとき，最小な自然数は $2^8 \times 3 = 768$

(iii) a^5b^2 の形のとき，最小な自然数は $2^5 \times 3^2 = 288$

(iv) $a^2b^2c^1$ の形のとき，最小な自然数は $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

以上より，求める最小の自然数 m は

$$\underline{\boldsymbol{m = 180}}$$

184 1 から 30 までの自然数のうち，2，2^2，2^3，$\cdots$ の倍数の個数を調べる。

$2 \times 15 = 30$ より，2 の倍数の個数は 15 個
$2^2 \times 7 = 28$ より，2^2 の倍数の個数は 7 個
$2^3 \times 3 = 24$ より，2^3 の倍数の個数は 3 個
$2^4 \times 1 = 16$ より，2^4 の倍数の個数は 1 個
$2^5 \times 1 = 32$ より，2^5 の倍数の個数は 0 個
$\cdots\cdots$

したがって

$$a = 15+7+3+1 = \underline{\mathbf{26}}$$

b，c についても同様に考えると

$$b = 10+3+1 = \underline{\mathbf{14}}$$
$$c = 6+1 = \underline{\mathbf{7}}$$

また，末尾に並ぶ 0 の個数は，30! の約数として含まれる 10 の個数によって定まる。すなわち，2 と 5 の個数によって定まる。ここでは，30! を素因数分解すると，2 が 26 個，5 が 7 個含まれるので，30! の約数として，10 は 7 個含まれることがわかる。したがって，30! の末尾の 0 の個数は $\underline{\mathbf{7}}$（個）

1.2　最大公約数，最小公倍数

問題

185 2 つの自然数 x，y $(x < y)$ の積が 588 で，最大公約数が 7 であるとき，この 2 つの自然数の組 $(x,\ y)$ は $(x,\ y) = \boxed{}$ である。　（愛知工業大）

186 次の各問いに答えよ。

(1) 20853 と 3843 の最大公約数を求めよ。

(2) $2^{16}+1$ と $2^{32}+1$ の最大公約数を求めよ。　（同志社大　改）

チェック・チェック

185 2 つの整数 a，b について，$a = bn$ をみたす整数 n が存在するとき，「b は a の**約数**である」,「a は b の**倍数**である」といいます。

また，2 つの整数 x，y の共通な約数を公約数といい，公約数のうち最も大きい数を**最大公約数**といいます。最大公約数が 1 のときは，x，y は**互いに素**であるといいます。

186 (1) 2 数を素因数分解しましょう。ユークリッドの互除法を利用して最大公約数を求めることもできます。

(2) 2 つの自然数 a，b について，a を b でわったときの余りを r とすると

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい

という定理があります。$2^{32}+1$ を $2^{16}+1$ でわった余りを求めましょう。

解答・解説

185 x，y の最大公約数が 7 であることより，x'，y' $(x' < y')$ を，互いに素な自然数とすると

$$x = 7x'$$
$$y = 7y'$$

とおける。x，y の積が 588 より

$$xy = 588 \quad \text{すなわち} \quad x'y' = 12$$

ここで，x'，y' は互いに素な自然数であるので

$$(x',\ y') = (1,\ 12),\ (3,\ 4)$$

の 2 通りに定まる。したがって，求める $(x,\ y)$ の組は

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y) = (7,\ 84),\ (21,\ 28)}}$$

186 (1) 20853 と 3843 を素因数分解すると

$$20853 = 3^2 \times 7 \times 331$$
$$3843 = 3^2 \times 7 \times 61$$

したがって，求める最大公約数は

$$3^2 \times 7 = \underline{\mathbf{63}}$$

(2) $\mathbf{2^{32} + 1} = 2^{32} - 1 + 2 = (\mathbf{2^{16} + 1})(2^{16} - 1) + \mathbf{2}$

と変形できるので，$2^{32} + 1$ と $2^{16} + 1$ の最大公約数は $2^{16} + 1$ と 2 の最大公約数に等しい。

ところで，$2^{16} + 1$ は奇数であり 2 は偶数なので，求める <u>**最大公約数は** 1</u> である。

別解 ユークリッドの互除法を使って，(1) の最大公約数を求めてみよう。

a と b の最大公約数を $(a,\ b)$ で表す。

$20853 = 3843 \times 5 + 1638$ より

$$(20853,\ 3843) = (3843,\ 1638)$$

$3843 = 1638 \times 2 + 567$ より

$$(3843,\ 1638) = (1638,\ 567)$$

$1638 = 567 \times 2 + 504$ より

$$(1638,\ 567) = (567,\ 504)$$

$567 = 504 \times 1 + 63$ より

$$(567,\ 504) = (504,\ 63)$$

$504 = 63 \times 8$ より

$$(504,\ 63) = 63$$

1.3　剰余系

問題

187 自然数 P が 2 でも 3 でも割り切れないとき，P^2-1 が 24 で割り切れることを証明せよ。（ノートルダム清心女子大）

188 どのような整数 n に対しても n^2+n+1 は 5 で割り切れないことを示せ。（学習院大）

チェック・チェック

187 自然数全体を 6 $(=2\times 3)$ でわった**余り（剰余）で分類**すると，p を 0 以上の整数として

$$6p,\ 6p+1,\ 6p+2,\ 6p+3,\ 6p+4,\ 6p+5$$

の 6 通りに分けられます。「P が 2 でも 3 でもわり切れない」とは

$$P=6p+1 \text{ または } 6p+5$$

と表されるということです。

188 すべての整数 n は

$$5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4 \quad (k \text{ は整数})$$

で表すことができますが

$$\mathbf{5k,\ 5k\pm 1,\ 5k\pm 2} \quad (k \text{ は整数})$$

としてもよいですね。

解答・解説

187 題意より，$P=6p+1$ または $6p+5$（p は 0 以上の整数）とおける。

(i) $P=6p+1$ のとき

$$P^2-1=(P+1)(P-1)=(6p+2)\cdot 6p=12p(3p+1)$$

ここで，p が偶数のときは p が，p が奇数のときは $3p+1$ が 2 でわり切れるので，p の偶奇にかかわらず，$p(3p+1)$ は 2 でわり切れる。

よって，$12p(3p+1)$ は 24 でわり切れる。

(ii) $P=6p+5$ のとき

$$P^2-1=(6p+6)(6p+4)=12(p+1)(3p+2)$$

p が偶数のときは $3p+2$ が，p が奇数のときは $p+1$ が 2 でわり切れるので，p の偶奇にかかわらず，$(p+1)(3p+2)$ は 2 でわり切れる。

よって，$12(p+1)(3p+2)$ は 24 でわり切れる。

以上より，$P=6p+1$，$6p+5$ いずれのときも P^2-1 は 24 でわり切れる。（証終）

別解 (ii) において，P を $P=6p-1$ とおくと

$$\begin{aligned}P^2-1&=(P+1)(P-1)\\&=6p(6p-2)\\&=12p(3p-1)\end{aligned}$$

であり，(i)，(ii) をまとめて

$$P^2-1=12p(3p\pm 1)$$

とすることができる。

188 $n=5k$，$5k\pm 1$，$5k\pm 2$（k は整数）とする。n^2+n+1 をそれぞれ計算すると

$$(5k)^2+5k+1=5(5k^2+k)+1$$

$$(5k\pm 1)^2+(5k\pm 1)+1=5(5k^2\pm 2k+k)+2\pm 1 \quad \text{（複号同順）}$$

$$(5k\pm 2)^2+(5k\pm 2)+1=5(5k^2\pm 4k+k)+5\pm 2 \quad \text{（複号同順）}$$

いずれのときも，n^2+n+1 は 5 でわり切れない。（証終）

1.4　合同式

問題

189 整数 a，b について，$a-b$ が 6 で割り切れるとき，$a \equiv b$ と表す。a，b，c，d を整数とするとき，次の (1) から (4) までの命題のそれぞれについて，それが真であるときは証明し，偽であるときは反例をあげよ。

(1) $a \equiv b$，$b \equiv c$ ならば，$a \equiv c$ である。

(2) $a \equiv b$，$c \equiv d$ ならば，$(a+c) \equiv (b+d)$ である。

(3) $a \equiv b$，$c \equiv d$ ならば，$ac \equiv bd$ である。

(4) $ab \equiv 0$ ならば，$a \equiv 0$ または $b \equiv 0$ である。　（広島大）

190 a，b，c は 5 で割ると余りがそれぞれ 1，2，3 となる自然数とする。$a+2b+3c$ を 5 で割ると余りは $\boxed{}$ で，ab^2c^3 を 5 で割ると余りは $\boxed{}$ である。　（東洋大）

191 「2^n を 7 で割ると 1 余る」という性質をもつ最小の自然数 n は $\boxed{}$ である。したがって，2^{12} を 7 で割った余りは $\boxed{}$，2^{2009} を 7 で割った余りは $\boxed{}$，$2^{2^{2009}}$ を 7 で割った余りは $\boxed{}$ である。ただし，a^{b^c} は「a の b^c 乗」を意味するものとする。　（日本歯科大）

チェック・チェック

189 整数 a と b を d でわった余りが等しいこと（$a-b$ が d の倍数であること）を $a \equiv b \pmod{d}$ と表します。これは**合同式**と呼ばれているもので，剰余の議論をするとき便利な表記です。等式「$=$」と同じような性質があります。

$a \equiv a' \pmod{d}$ かつ $b \equiv b' \pmod{d}$ ならば，

(i) $\boldsymbol{a+b \equiv a'+b' \pmod{d}}$

(ii) $\boldsymbol{a-b \equiv a'-b' \pmod{d}}$

(iii) $\boldsymbol{ab \equiv a'b' \pmod{d}}$

ただし，わり算については注意が必要です。

$ac \equiv a'c \pmod{d}$ のとき，

(iv) **c と d が互いに素ならば**　　$\boldsymbol{a \equiv a' \pmod{d}}$

190 合同式の性質から，$a \equiv a' \pmod{d}$，$b \equiv b' \pmod{d}$ ならば

(i) $pa+qb \equiv pa'+qb' \pmod{d}$ （p，q は整数）

(ii) $a^m b^n \equiv a'^m b'^n \pmod{d}$ （m，n は自然数）

が成り立ちます。

191 $2^{2^{2009}}$ については，$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ より $2^{2^{2009}}$ を 2^{3k+r} $(0 \leqq r \leqq 2)$ の形に表せば

$$2^{2^{2009}} = 2^{3k+r} = 2^{3k}\cdot 2^r \equiv 1^k \cdot 2^r = 2^r \pmod{7}$$

です。

解答・解説

189 (1) $a \equiv b$，$b \equiv c$ より

$$\begin{cases} a-b=6k \\ b-c=6l \end{cases} \quad (k,\ l \text{ は整数})$$

と表せる。辺々を加えて

$$a-c=6(k+l)$$

したがって，$a \equiv c$ なので **真** である。 （証終）

(2) $a \equiv b$，$c \equiv d$ より

$$\begin{cases} a-b=6k \\ c-d=6m \end{cases} \quad (k,\ m \text{ は整数}) \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。辺々を加えて

$$(a+c)-(b+d)=6k+6m=6(k+m)$$

したがって，$(a+c) \equiv (b+d)$ なので **真** である。 （証終）

(3) ① の下で

$$\begin{aligned} ac-bd &= a\boldsymbol{(c-d)+ad}-bd \\ &= a(c-d)+d(a-b) \\ &= a \times 6m + d \times 6k \\ &= 6(am+dk) \end{aligned}$$

したがって，$ac \equiv bd$ なので **真** である。 （証終）

(4) $\boldsymbol{a=2,\ b=3}$ のとき，$ab \equiv 0$ であるが，$a \equiv 0$ または $b \equiv 0$ でないので **偽** である。

190 $a \equiv 1 \pmod 5$，$b \equiv 2 \pmod 5$，$c \equiv 3 \pmod 5$ とおけるから

$$a+2b+3c \equiv 1+2\cdot 2+3\cdot 3=14 \equiv \mathbf{4} \pmod 5$$

$$ab^2c^3 \equiv 1\cdot 2^2\cdot 3^3=108 \equiv \mathbf{3} \pmod 5$$

191 $2^n \equiv 1 \pmod 7$ となる最小の自然数 n を求める。

$$2^1 \equiv 2 \pmod 7$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod 7$$
$$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$$

より，求める最小の自然数 n は $\underline{\mathbf{3}}$

また

$$2^{12} = (2^3)^4 \equiv 1^4 \equiv \underline{\mathbf{1}} \pmod 7$$
$$2^{2009} = 2^{3\cdot 669+2} = 2^2 \cdot (2^3)^{669} \equiv 4 \cdot 1^{669} \equiv \underline{\mathbf{4}} \pmod 7$$

次に，$2^3 \equiv 1 \pmod 7$ より，$2^{2^{2009}}$ を 2^{3k+r} $(0 \leqq r \leqq 2)$ の形に変形する。

$2^1 \equiv 2 \pmod 3$，$2^2 \equiv 1 \pmod 3$ より

$$2^{2009} = 2 \cdot (2^2)^{1004} \equiv 2 \pmod 3$$

となる。したがって

$$2^{2009} = 3k + 2 \qquad (k \text{ は自然数})$$

が成り立つ。以上より

$$2^{2^{2009}} = 2^{3k+2} = 2^2 \cdot (2^3)^k \equiv 4 \cdot 1^k \equiv \underline{\mathbf{4}} \pmod 7$$

1.5　不定方程式（1 次）

問題

192 方程式 $18x-5y=1$ をみたす自然数の解の組 $(x,\ y)$ のうち，x が一桁のものは，x が小さい方から順に $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，$\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。（昭和女子大）

193 $3x+5y=2009$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{}$ 通りある。その中で $|x-y|$ が最小となる組は $(x,\ y)=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。

（摂南大）

194 ある自然数があり，それを 9 で割ると 5 余り，7 で割ると 4 余り，63 で割ると r 余る。このとき，$r=\boxed{}$ である。（慶應義塾大）

195 2 つの方程式 $x+y+z=19$，$17x+6y+3z=114$ を同時にみたす正の整数 x，y，z は $x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$，$z=\boxed{}$ である。（芝浦工業大）

196 自然数 $(x,\ y,\ z)$ の組で $x+2y+3z=15$ をみたすものは全部で何組あるか。（長崎総合科学大）

チェック・チェック

192 整数を係数とする方程式 $ax+by=c$ の整数解 $(x,\ y)$ を求めるには，一組の解 $(x_0,\ y_0)$ を見つけて，$ax_0+by_0=c$ と与式との差をつくります。あとは

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad \therefore \quad a(x-x_0)=b(y_0-y)$$

と変形し，両辺の約数・倍数の関係を調べていきます。

193 1 次の不定方程式 $ax+by=c$ について，a と b が互いに素ならば解は必ず存在します。

194 与えられた条件より，題意の自然数 n は

$$n=9a+5=7b+4 \quad (a,\ b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表すことができます。

195 1 文字を消去すれば，2 元の 1 次不定方程式の問題です。

196 今度は**絞り込み**を考えます。最大係数をもつ z に着目して

$$3z=15-(x+2y)$$

と変形し，$x+2y \geqq 1+2\cdot1=3$ であることに注意すると，z の範囲が絞られます。

解答・解説

192 与式をみたす 1 組の解 $(x,\ y)$ を見つける。

$$18x-5y=1,\quad \mathbf{18\cdot 2-5\cdot 7=1}$$

2 式をひいて，移項すると

$$18(x-2)=5(y-7)$$

18 と 5 は互いに素より

$$x-2=5k\ \ (k\ は整数)$$

とおける。このとき，$18\cdot 5k=5(y-7)$ より

$$y-7=18k \qquad \therefore \begin{cases} x=2+5k \\ y=7+18k \end{cases} \quad (k\ は整数)$$

$x,\ y$ は自然数より，x が 1 桁のものを小さい方から順にならべると

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 7),\ (7,\ 25)}} \quad (\because \quad k=0,\ 1\ を代入)$$

193 与式をみたす 1 組の解 $(x,\ y)$ を見つける。

$$3x+5y=2009,\quad \mathbf{3\cdot 3+5\cdot 400=2009}$$

2 式をひいて，移項すると

$$3(x-3)=-5(y-400)$$

3 と 5 は互いに素であるので

$$\begin{cases} x-3=5k \\ y-400=-3k \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=3+5k \\ y=400-3k \end{cases} \quad (k\ は整数)$$

$x,\ y$ は正の整数より，$3+5k \geqq 1$ かつ $400-3k \geqq 1$ である。したがって，k の値の範囲は $-\dfrac{2}{5} \leqq k \leqq 133$ となることより，これをみたす整数 k の個数は 134 個。よって，求める正の整数の組 $(x,\ y)$ は $\underline{\mathbf{134}}$ 通りある。

　また

$$|x-y|=|3+5k-(400-3k)|=|8k-397|=8\left|k-\frac{397}{8}\right|$$

となり，$\dfrac{397}{8}$ に最も近い整数は $k=50$ である。以上より，求める $(x,\ y)$ の組は

$$(x,\ y)=(3+5\cdot 50,\ 400-3\cdot 50)=\underline{\mathbf{(253,\ 250)}}$$

194 ある自然数を n とする。条件より，$a,\ b$ を整数とすると

$$\begin{cases} n=9a+5 \\ n=7b+4 \end{cases}$$

とおける。よって

$$9a+5=7b+4,\quad \mathbf{9\cdot 3+5=7\cdot 4+4}$$

2 式をひいて，整理すると

$$9(a-3)=7(b-4)$$

9 と 7 は互いに素より，k を整数として

$$\begin{cases} a-3=7k \\ b-4=9k \end{cases} \qquad \begin{cases} a=3+7k \\ b=4+9k \end{cases} \qquad \therefore \quad n=63k+32$$

以上より，n を 63 でわると，余り r は $\underline{\boldsymbol{r=32}}$ であることがわかる。

195 $x+y+z=19 \quad \cdots\cdots ①$，$17x+6y+3z=114 \quad \cdots\cdots ②$ とおく。

② − ① × 3 より

$$14x+3y=57, \quad \boldsymbol{14\cdot 3+3\cdot 5=57}$$

2 式をひいて，移項すると

$$14(x-3)=3(5-y)$$

14 と 3 は互いに素より

$$\begin{cases} x-3=3k \\ 5-y=14k \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=3+3k \\ y=5-14k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$x>0$，$y>0$ より $\qquad -1<k<\dfrac{5}{14}$

k は整数より $\qquad k=0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x=3}}, \quad \underline{\boldsymbol{y=5}}, \quad \underline{\boldsymbol{z=11}} \quad (\because \ ①)$

196 $3z=15-(x+2y)$ であり，x，y が自然数より $x \geqq 1$，$2y \geqq 2$ なので，$x+2y \geqq 3$ である。したがって

$$3z=15-(x+2y) \leqq 15-3=12$$

であるから，$\boldsymbol{1 \leqq z \leqq 4}$ となる。

(i) $z=1$ のとき，$x+2y=12$ であり

$$2y=12-x \leqq 11 \qquad \therefore \quad y \leqq \frac{11}{2}$$

つまり，$y \leqq 5$ であり $x=12-2y$ より，これをみたす $(x,\ y,\ z)$ は 5 組ある。

(ii) $z=2$ のとき，$x+2y=9$ であり

$$2y=9-x \leqq 8 \qquad \therefore \quad y \leqq 4$$

$x=9-2y$ より，これをみたす $(x,\ y,\ z)$ は 4 組ある。

(iii) $z=3$ のとき，$x+2y=6$ であり

$$2y=6-x \leqq 5 \qquad \therefore \quad y \leqq \frac{5}{2}$$

つまり，$y \leqq 2$ であり $x=6-2y$ より，これをみたす $(x,\ y,\ z)$ は 2 組ある。

(iv) $z=4$ のとき，$x+2y=3$ であり

$$2y=3-x \leqq 2 \qquad \therefore \quad y=1$$

つまり，$(x,\ y,\ z)$ は 1 組のみ。

以上，(i)〜(iv) より

$$5+4+2+1=\underline{\textbf{12}\text{（組）}}$$

1.6　不定方程式（2 次）

問題

197 等式 $xy=2x+2y+2$ を満たす整数 x，y の組を求めよ。ただし，$x \geqq y$ とする。　（広島工業大）

198 x，y は自然数で，とくに x は 1 から 10 までの数とする。このとき，等式 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}$ をみたす自然数解の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

（久留米工業大）

199 2 桁の自然数 a，b は $a^2-4ab+3b^2=64$ をみたす。
このとき $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。　（慶應義塾大）

200 $x^2+3xy+x+3y-24=0$ をみたす正の整数 x，y の組は $\boxed{}$ である。　（京都産業大）

201 $0<x \leqq y \leqq z$ である整数 x, y, z について以下の問に答えよ。

(1) $xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5$ をみたす整数 x，y，z をすべて求めよ。

(2) $xyz=x+y+z$ をみたす整数 x，y，z をすべて求めよ。　（同志社大）

チェック・チェック

197　2 元 2 次の不定方程式

$$xy - ax - by + c = 0$$

の整数解 $(x,\ y)$ を求めるには

$$(x-b)(y-a) = r$$

と変形し，整数 r の約数の組合せとなる整数の組 $(x-b,\ y-a)$ をすべて調べます。

198　$x = 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ と代入するのも 1 つの手ですが，ムダが多いですね。通分して整理すると

$$xy + 6x - 6y = 0$$

であり，これは 2 次の不定方程式です。

$$(\qquad)(\qquad) = \text{整数}$$

と変形し，約数の組を調べていくとよいでしょう。

199　左辺は因数分解できて

$$(a-b)(a-3b) = 2^6$$

と変形されます。

200　少し複雑になりましたが，これも

$$(\qquad)(\qquad) = \text{整数}$$

への変形を考えます。与式は x については 2 次式ですが，y については 1 次式です。

201　(1)　1 つの文字について，式を整理してみましょう。

$$(\qquad)(\qquad)(\qquad) = \text{整数}$$

と変形されます。

(2)　$0 < x \leqq y \leqq z$ ですから

$$xyz = x + y + z \leqq z + z + z = 3z$$

です。これにより xy の値を**絞り込む**ことができます。

解答・解説

197 $xy = 2x + 2y + 2$ を変形すると

$$x(y-2) - 2y = 2$$
$$x(y-2) - 2(y-2) = 2 + 4$$
$$\therefore \quad (x-2)(y-2) = 6$$

$x \geqq y$ より $x - 2 \geqq y - 2$ であり，$x-2$，$y-2$ は整数だから

$x-2$	6	3	-1	-2
$y-2$	1	2	-6	-3

よって，求める組は

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y) = (8,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ -4),\ (0,\ -1)}}$$

198 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{y}$ を変形すると

$$6y = xy + 6x$$
$$6y = x(y+6)$$
$$x(y+6) - 6(y+6) = -36$$
$$\therefore \quad (x-6)(y+6) = -36$$

$1 \leqq x \leqq 10$，$y \geqq 1$ より

$$-5 \leqq x - 6 \leqq 4, \quad y + 6 \geqq 7$$

であり，$x-6$，$y+6$ は整数だから，$(x-6,\ y+6)$ の組は下の表のようになる。

$x-6$	-4	-3	-2	-1
$y+6$	9	12	18	36

よって，求める組は

$$(x,\ y) = \underline{\boldsymbol{(2,\ 3),\ (3,\ 6),\ (4,\ 12),\ (5,\ 30)}}$$

199 $a^2 - 4ab + 3b^2 = 64$ を変形すると

$$(a-b)(a-3b) = 2^6$$

a，b は自然数より，$a - b > a - 3b$ であり，$a-b$，$a-3b$ は整数だから

$a-b$	2^6	2^5	2^4	-2^0	-2^1	-2^2
$a-3b$	2^0	2^1	2^2	-2^6	-2^5	-2^4

すなわち

a	$\dfrac{191}{2}$	47	22	$\dfrac{61}{2}$	13	2
b	$\dfrac{63}{2}$	15	6	$\dfrac{63}{2}$	15	6

a，b は 2 桁の自然数であるので

$$\underline{\boldsymbol{a = 13 \text{ または } 47, \quad b = 15}}$$

200 $x^2+3xy+x+3y-24=0$ を y について整理すると

$$3y(x+1)+x(x+1)=24$$

$$\therefore\quad (x+1)(x+3y)=2^3\cdot 3$$

$x+1 \geqq 1+1=2$, $x+3y \geqq 1+3\cdot 1=4$ より

$x+1$	2	3	4	6
$x+3y$	12	8	6	4

すなわち

x	1	2	3	5
$3y$	11	6	3	-1

であるから

$$(x,\ y)=\left(1,\ \frac{11}{3}\right),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ \left(5,\ -\frac{1}{3}\right)$$

このうち，x，y が正の整数になるものは

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2),\ (3,\ 1)}}$$

201 (1) 与式を x について整理して

$$(yz+1-y-z)x+(y+z-yz)=5$$

$$(y-1)(z-1)x-(y-1)(z-1)=5-1$$

$$\therefore\quad (x-1)(y-1)(z-1)=4$$

ここで，$0 \leqq x-1 \leqq y-1 \leqq z-1$ より

$$(x-1,\ y-1,\ z-1)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2)$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 3)}}$$

(2) $1 \leqq x \leqq y \leqq z$ より

$$xyz=x+y+z \leqq z+z+z=3z$$

よって，**xy の範囲は $1 \leqq xy \leqq 3$ と絞られる。**

(i) $(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき

$$3z=1+3+z \qquad \therefore\quad z=2$$

$z<y$ となり不適。

(ii) $(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき

$$2z=1+2+z \qquad \therefore\quad z=3$$

(iii) $(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき

$$z=1+1+z$$

となり不適。

以上，(i)〜(iii) より

$$\underline{\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)}}$$

1.7　循環小数

問題

202 (1) 循環小数 $2.\dot{6}\dot{3}$（すなわち，$2.636363\cdots$）を既約分数で表せ。
（慶應義塾大）

(2) 循環小数 $1.\dot{2}3\dot{8}$ を分数で表しなさい。（日本大）

チェック・チェック

202 無限小数になる有理数は循環小数です。

循環小数を有理数で表すには，循環節が消えるように式変形するのがコツです。
(1) では「$100 \times 2.\dot{6}\dot{3} - 2.\dot{6}\dot{3}$」，(2) では「$1000 \times 1.\dot{2}3\dot{8} - 1.\dot{2}3\dot{8}$」をそれぞれ考えるとよいでしょう。

解答・解説

202 (1) $a = 2.\dot{6}\dot{3} = 2.636363\cdots$ ……① とおくと

$100a = 263.636363\cdots$ ……②

② − ① より

$99a = 261$ $\quad\therefore\quad a = \underline{\mathbf{\dfrac{29}{11}}}$

(2) $b = 1.\dot{2}3\dot{8} = 1.238238238\cdots$ ……③ とおくと

$1000b = 1238.238238\cdots$ ……④

④ − ③ より

$999b = 1237$ $\quad\therefore\quad b = \underline{\mathbf{\dfrac{1237}{999}}}$

1.8 連分数

問題

203 次の式を簡単にせよ。

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

（高知工科大　改）

204 $\dfrac{355}{113} = \boxed{} + \cfrac{1}{\boxed{} + \cfrac{1}{\boxed{}}}$ である。（甲南大）

チェック・チェック

$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$ の形をした分数式を**連分数**といいます。

203 単なる式変形です。

204 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ の形の式は，n を m でわったときの商を a_0，余りを r とおくと

$$n = ma_0 + r \iff \frac{n}{m} = a_0 + \frac{r}{m} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{m}{r}}$$

次に m を r でわることにより，連分数展開が続いていきます。

解答・解説

203 与式を整理して

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}=\frac{1}{1+\dfrac{3}{4}}=\frac{1}{\dfrac{7}{4}}=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}}}$$

204 $$\frac{355}{113}=3+\frac{16}{113}=3+\frac{1}{\dfrac{113}{16}}=\underline{\boldsymbol{3+\frac{1}{7+\dfrac{1}{16}}}}$$

1.9 n 進法

問題

205 次の等式が成り立つように，0 または 1 を入れよ。

(1) $27 = \boxed{} \times 2^4 + \boxed{} \times 2^3 + \boxed{} \times 2^2 + \boxed{} \times 2 + \boxed{}$

(2) $5.875 = \boxed{} \times 2^2 + \boxed{} \times 2 + \boxed{} + \boxed{} \times 2^{-1} + \boxed{} \times 2^{-2} + \boxed{} \times 2^{-3}$ （湘南工科大）

206 (1) 3 進法で表された 20212 は，10 進法では $\boxed{}$ と表される。（立教大）

(2) 2 進法で表した小数 0.111 を 4 進法で表せば $\boxed{}$ である。（芝浦工業大）

207 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 はそれぞれ 0，1，2 のいずれかであり，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2$ をみたす。

$$N = 81a_1 + 27a_2 + 9a_3 + 3a_4 + a_5$$

のとき，N の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。また，異なる N の値は全部で $\boxed{}$ 個ある。（大阪工業大）

チェック・チェック

205 10 進法の 27，5.875 を 2 進法で表せという問題です。**p 進法** で表された n 桁の数 N とは

$N=a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+\cdots+a_1p+a_0$　（ただし，$0 \leqq a_k \leqq p-1$，$a_{n-1} \neq 0$）

のことであり，これは $N=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_{0(p)}$ と位を取って表す（位取り記数法）のが普通です。10 進法では，最後の $_{(10)}$ の部分は省略します。

(2) $2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，$2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$，$2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$ です。負の指数は数学IIで扱います。

206 (1) $20212_{(3)}=2\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+1\times3^1+2\times3^0$

(2) p 進法を q 進法に直せという問題ですね。

$$0.111_{(2)}=1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$$

207 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 がそれぞれ 0，1，2 のいずれかであるとき，

$$N=3^4\cdot a_1+3^3\cdot a_2+3^2\cdot a_3+3^1\cdot a_4+3^0\cdot a_5=a_1a_2a_3a_4a_{5(3)}$$

であり，N の 3 進法表記になっています。

解答・解説

205 (1) $27 = 16 + 8 + 2 + 1$ より

$$27 = \underline{\mathbf{1}} \times 2^4 + \underline{\mathbf{1}} \times 2^3 + \underline{\mathbf{0}} \times 2^2 + \underline{\mathbf{1}} \times 2 + \underline{\mathbf{1}}$$

(2) $5.875 = \dfrac{5875}{1000} = \dfrac{47 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{47}{2^3}$

ここで

$$\begin{aligned} 47 &= 32 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 5.875 &= \frac{1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1}{2^3} \\ &= \underline{\mathbf{1}} \times 2^2 + \underline{\mathbf{0}} \times 2 + \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} \times 2^{-1} + \underline{\mathbf{1}} \times 2^{-2} + \underline{\mathbf{1}} \times 2^{-3} \end{aligned}$$

【参考】2 によるわり算を繰り返すことにより 2 進法展開を得ることができます。

$$\begin{aligned} 27 &= 13 \times 2 + 1 \\ &= (6 \cdot 2 + 1) \times 2 + 1 = 6 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &= (3 \cdot 2 + 0) \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 3 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &= (1 \cdot 2 + 1) \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

といった具合です。これには，次のような簡便法があります。

(1)

$$\begin{array}{r|r l r} 2 & 27 & & \text{余り} \\ \hline 2 & 13 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 6 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \hline & 1 & \cdots & 1 \end{array}$$

$27 = 11011_{(2)}$

(2)

$$\begin{array}{r|r l r} 2 & 47 & & \text{余り} \\ \hline 2 & 23 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 11 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 5 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots & 1 \\ \hline & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

$47 = 101111_{(2)}$

206 (1) 3 進法で表された 20212 は 10 進法では

$$\mathbf{2}\times 3^4+\mathbf{0}\times 3^3+\mathbf{2}\times 3^2+\mathbf{1}\times 3+\mathbf{2}=162+0+18+3+2$$
$$=\underline{\mathbf{185}}$$

(2) 2 進法で表された 0.111 は

$$\frac{\mathbf{1}}{2}+\frac{\mathbf{1}}{2^2}+\frac{\mathbf{1}}{2^3}=\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{4^2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}$$

となるので，4 進法で表すと $\underline{\mathbf{0.32}}$

207 $N=3^4\cdot a_1+3^3\cdot a_2+3^2\cdot a_3+3^1\cdot a_4+3^0\cdot a_5$ で，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 はそれぞれ 0，1，2 のいずれかであることより，$a_1a_2a_3a_4a_5$ は N の 3 進法表記である。

また，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$ をみたすのは，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 のうち

(i) 2 つが 1 で，残り 3 つが 0

(ii) 1 つが 2 で，残り 4 つが 0

のいずれかの場合である。このとき，3 進数の最大値は $20000_{(3)}$ となるので，N の最大値は

$$N=3^4\cdot 2=\underline{\mathbf{162}}$$

3 進数の最小値は $00002_{(3)}$ より，N の最小値は

$$N=\underline{\mathbf{2}}$$

また，a_1〜a_5 の値が異なれば，N の値も異なるので

(i) の場合が ${}_5\mathrm{C}_2=10$（個），　(ii) の場合が ${}_5\mathrm{C}_1=5$（個）

より

$$10+5=\underline{\mathbf{15}\text{（個）}}$$