1　場合の数

1.1　集合の要素の個数

問題

208 300 から 440 までの整数のうち，3 の倍数全体の集合を A, 奇数全体の集合を B とする。このとき，

$n(A) = \boxed{}$, $n(B) = \boxed{}$,

$n(A \cap B) = \boxed{}$, $n(A \cup B) = \boxed{}$

である。ここで，$n(M)$ は集合 M の要素の個数を表す。（東北工業大　改）

209 1 から 150 までの自然数の中で

(1) 3 でも 5 でも割り切れる自然数の個数を求めよ。

(2) 3 で割り切れるが，5 で割り切れない自然数の個数を求めよ。

(3) 3 でも 5 でも割り切れない自然数の個数を求めよ。（北海道東海大）

210 3 種類の商品 A, B, C について市場調査を行ったところ，500 人から回答を得た。集計結果によれば，商品 A を買った人は 224 人，商品 B を買った人は 237 人，商品 C を買った人は 266 人であり，また 3 種類とも買った人は 20 人，3 種類の商品のどれも買わなかった人は 9 人であった。次の問いに答えよ。

(1) 2 種類以上の商品を買った人は $\boxed{}$ 人である。

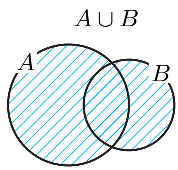
(2) 商品 A, B, C のうち，3 種類すべては買わなかったが，どれか 2 種類を買った人は $\boxed{}$ 人である。

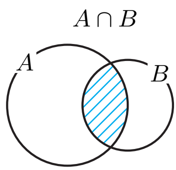
(3) 商品 A, B, C のいずれか 1 種類だけを買った人は $\boxed{}$ 人である。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

208 和集合 $A \cup B$，共通部分 $A \cap B$ の区別をつけましょう。また，集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すと





$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n(A \cup B)}\\ &= \boldsymbol{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}\end{aligned}$$

が成り立ちます。

209 2 つの集合の取り扱いです。3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると，問題文が意味するものは

(1) $A \cap B$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

となります。

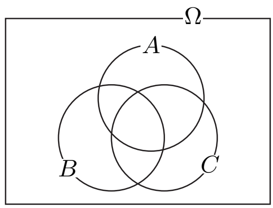
かつ（∩），または（∪）と否定（$\overline{\quad}$）を結ぶ法則として

$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

（ド・モルガンの法則）

がありましたね。

210 3 つの集合を扱った問題です。



$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}\\ &= \boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}\\ &\quad \boldsymbol{- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)}\\ &\quad \boldsymbol{+ n(A \cap B \cap C)}\end{aligned}$$

が成り立ちます。

(1) は

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2n(A \cap B \cap C)$$

となります。(2)，(3) は (1) と関連づけて考えます。

別解 としては，Ω を 8 個の排反な集合に分けて考える方法もあります。

解答・解説

208 $A=\{300,\ 303,\ 306,\ 309,\ \cdots,\ 438\}$ であるから

$$n(A)=(438-297)\div 3=\underline{\mathbf{47}}$$

また，$B=\{301,\ 303,\ 305,\ 307,\ \cdots,\ 439\}$ であるから

$$n(B)=(439-299)\div 2=\underline{\mathbf{70}}$$

である。さらに，$A\cap B$ は 300 から 440 までの整数のうち，**3 の倍数である奇数の集合**なので

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{3k\mid k=101,\ 103,\ 105,\ 107,\ \cdots,\ 145\}\\&=\{3(2l-1)\mid l=51,\ 52,\ 53,\ \cdots,\ 73\}\end{aligned}$$

より

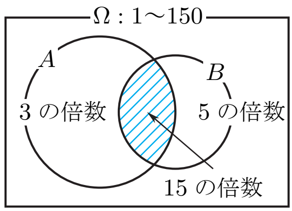
$$n(A\cap B)=73-50=\underline{\mathbf{23}}$$

したがって

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}=47+70-23=\underline{\mathbf{94}}$$

209 $\Omega=\{1$ から 150 までの自然数$\}$，
$A=\{3$ の倍数$\}$，$B=\{5$ の倍数$\}$ とおくと

$$n(A)=150\div 3=50,$$
$$n(B)=150\div 5=30$$

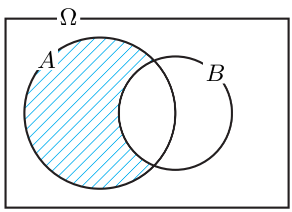


(1) 3 でも 5 でもわり切れる自然数は 15 の倍数なので，求める個数は

$$n(A\cap B)=150\div 15=\underline{\mathbf{10}\text{（個）}}$$

(2) 3 でわり切れるが 5 でわり切れない自然数の個数は

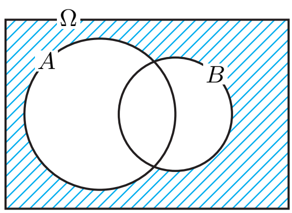
$$\begin{aligned}n(A\cap\overline{B})&=n(A)-n(A\cap B)\\&=50-10=\underline{\mathbf{40}\text{（個）}}\end{aligned}$$



$A\cap\overline{B}$

(3) 3 でも 5 でもわり切れない自然数の個数は

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cap\overline{B})&=n(\overline{A\cup B})=n(\Omega)-n(A\cup B)\\&=n(\Omega)-\{n(A)+n(B)\\&\qquad -n(A\cap B)\}\\&=150-(50+30-10)\\&=\underline{\mathbf{80}\text{（個）}}\end{aligned}$$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

210 与えられた条件より

$$n(A)=224,\quad n(B)=237,\quad n(C)=266,$$
$$n(A\cap B\cap C)=20,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=9$$

であり

$$n(A\cup B\cup C)=500-9=491$$

である。また

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

より

$$\begin{aligned}&n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\\=\ &n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)-n(A\cup B\cup C)\\=\ &224+237+266+20-491=256\end{aligned}$$

(1) 2 種類以上の商品を買った人は

$$\begin{aligned}&n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-2n(A\cap B\cap C)\\=\ &256-2\times 20=\underline{\mathbf{216}\text{（人）}}\end{aligned}$$

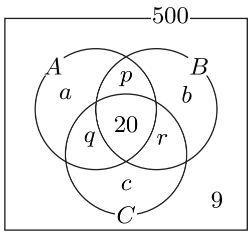
(2) (1) より

$$216-n(A\cap B\cap C)=216-20=\underline{\mathbf{196}\text{（人）}}$$

(3) (1) より

$$n(A\cup B\cup C)-216=491-216=\underline{\mathbf{275}\text{（人）}}$$

別解 右図のように各集合の要素の個数を a，b，c，p，q，r とおくと与えられた条件より



$$\begin{cases}a+b+c+p+q+r+20+9=500\\a+p+q+20=224\\b+p+r+20=237\\c+q+r+20=266\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}a+b+c+p+q+r=471 & \cdots\cdots①\\a+p+q=204 & \cdots\cdots②\\b+p+r=217 & \cdots\cdots③\\c+q+r=246 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

(1) ②＋③＋④－① より $p+q+r=(204+217+246)-471=196$

（求める人数）$=p+q+r+20=196+20=216$（人）

(2) （求める人数）$=p+q+r=196$（人）

(3) （求める人数）$=a+b+c=471-196=275$（人） $(\because\ ①)$

1.2 辞書的配列

問題

211 SHUDAI の 6 文字を全部使ってできる文字列（順列）をアルファベット順の辞書に並べる。ただし，ADHISU を 1 番目，ADHIUS を 2 番目，……，USIHDA を最後の文字列とする。

(1) 110 番目の文字列は何か。

(2) 文字列 SHUDAI は何番目か。 （広島修道大）

212 HGAKUEN の 7 文字から 6 文字を選んで文字列を作り，それを辞書式に配列する。ただし，同じ文字は繰り返して用いないものとする。

(1) 全部で何通りの文字列があるか。

(2) GAKUEN は始めから数えて何番目の文字列か。 （北海学園大）

213 5 個の整数 0，1，2，3，4 を使って 4 桁の整数をつくるとき，1200 より大きい奇数はいくつできるか。ただし，同じ数字を何度使ってもよいものとする。 （甲南大）

214 5 個の数字 0，1，2，3，4 を使って作った各位の数字がすべて異なる 5 桁の整数について，これらの数を小さいものから順に並べたとする。

(1) 43210 は何番目になるか。

(2) 第 90 番目の数は何か。

(3) 30142 は何番目の数になるか。

(4) 第 70 番目の数は何か。 （産能大）

チェック・チェック

211 ものを数え上げるときは，モレなくダブリなく数えることが大切です。その方法の一つが**辞書的配列**です。

数学っぽくないと思うかもしれませんが，コツコツ数え上げる姿勢がこの分野では大切です。1 文字目が A のもの，D のもの $\cdots$ と順に考えてみましょう。

212 異なる n 個のものから r 個選んで 1 列に並べた順列の数は ${}_n\mathrm{P}_r$ と表され

$$
{}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1) = \frac{n\,!}{(n-r)!} \qquad (r \leqq n)
$$

となります。

213 1200 よりも大きい 4 桁の整数は最高位（千の位）の数が 1 であるか否かで場合分けして考えましょう。また，奇数である条件は一の位の数が奇数であることです。つまり，本問では 1 または 3 であることですね。

214 (1) 5 桁の整数ですから，最高位に 0 がくることはありません。また，43210 は最後に並ぶ数です。

(2) (1) より，大きい方から並べてみる方が早そうです。

解答・解説

211 (1) 異なる 6 文字を使ってできる文字列の総数は，$6! = 720$ 通り。
先頭が A のとき，残りの 5 文字の並び方を考えて，$5! = 120$ 通りあるので，110 番目の先頭は A である。

A D □□□□ タイプは 4! 通り（最後は 24 番目）
A H □□□□ タイプは 4! 通り（最後は 48 番目）
A I □□□□ タイプは 4! 通り（最後は 72 番目）
A S □□□□ タイプは 4! 通り（最後は 96 番目）
A U D □□□ タイプは 3! 通り（最後は 102 番目）
A U H □□□ タイプは 3! 通り（最後は 108 番目）
A U I D □□ タイプは 2! 通り（最後は 110 番目）

したがって

<u>AUIDSH</u>

別解 A □□□□□タイプは $5! = 120$ 通りあるので，110 番目は A □□□□□タイプの後ろから 11 番目の文字列である。

A U S □□□ タイプは $3! = 6$ 通り
A U I □□□ タイプは $3! = 6$ 通り

あるから AUI □□□タイプを辞書式に並べたときの前から 2 番目の文字列 AUIDSH が求めるものである。

(2)

$$\left.\begin{array}{l}\text{A □□□□□}\\ \text{D □□□□□}\\ \text{H □□□□□}\\ \text{I □□□□□}\end{array}\right\}\text{タイプは } 5! \times 4 = 480 \text{ 通り}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{S A □□□□}\\ \text{S D □□□□}\end{array}\right\}\text{タイプは } 4! \times 2 = 48 \text{ 通り}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{S H A □□□}\\ \text{S H D □□□}\\ \text{S H I □□□}\end{array}\right\}\text{タイプは } 3! \times 3 = 18 \text{ 通り}$$

S H U A □□　タイプは $2! = 2$ 通り

S H U D A I

と並ぶから，SHUDAI は

$480 + 48 + 18 + 2 + 1 =$ **<u>549（番目）</u>**

212 (1) 異なる 7 文字から 6 文字を選んでできる順列であり

$${}_7P_6 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = \underline{\mathbf{5040}\ \text{（通り）}}$$

(2)　A □□□□□，E □□□□□

のタイプはそれぞれ ${}_6P_5 = 720$ 通りある。

GAE □□□，GAH □□□

のタイプはそれぞれ ${}_4P_3 = 24$ 通りある。

GAKE □□，GAKH □□，GAKN □□

のタイプはそれぞれ ${}_3P_2 = 6$ 通りある。

GAKU □□

のタイプは GAKUEH の次が GAKUEN なので，以上のことから

$$720 \times 2 + 24 \times 2 + 6 \times 3 + 2 = \underline{\mathbf{1508}\ \text{（番目）}}$$

213 4 桁の整数が奇数 $\Longleftrightarrow$ 4 桁の整数かつ一の位が奇数

奇数となるのは，一の位が 1 または 3 のときであり，同じ数字を何度使ってもよいから

(i) 千の位が 1 のとき

百の位が 2，3，4 のいずれかであればよく，十の位は 5 通りあるので

$$1 \times 3 \times 5 \times 2 = 30\ \text{（個）}$$

(ii) 千の位が 2，3，4 のいずれかのとき

百の位，十の位はそれぞれ 5 通りあるので

$$3 \times 5^2 \times 2 = 150\ \text{（個）}$$

(i)，(ii) より

$$30 + 150 = \underline{\mathbf{180}\ \text{（個）}}$$

214 (1) 各位の数字がすべて異なるから，5 桁の整数は全部で

$$4 \times 4! = 96\ \text{通り}$$

あり，43210 はその最後の数なので，**<u>96（番目）</u>** である。

(2) 大きい順に並べて 7 番目の数が小さい順に並べた 90 番目の数なので

43210，43201，43120，43102，43021，43012，42310

よって　**<u>42310</u>**

(3) 1，2 が先頭にくる場合はそれぞれ

$$4! = 24\ \text{通り}$$

30142 は 3 が先頭にくる 2 番目の数なので

$$24 \times 2 + 2 = \underline{\mathbf{50}\ \text{（番目）}}$$

(4) 3 が先頭にくる場合も 24 通りあるので，3 が先頭でもっとも大きいのは

$$24 \times 3 = 72\ \text{（番目）}$$

72 番目，71 番目，70 番目と順に並べて　34210，34201，34120

したがって，70 番目は　**<u>34120</u>**

1.3　和の法則

問題

215 大小 2 個のサイコロを投げるとき，目の和が 5 以下になる場合は全部で $\boxed{}$ 通り。（法政大）

216 1 から 2001 までの数を，十進法ですべて表記すれば，使われた「0」から「9」までの数字は全部で $\boxed{}$ 個となる。（小樽商科大）

217 0，1，2，3，4 の中から異なる 4 個の数字を選んでできる 4 桁の整数で 4 の倍数となるものは $\boxed{}$ 個あり，そのうちで 2000 より大きな整数は $\boxed{}$ 個ある。（南山大）

チェック・チェック

和の法則

一般に事柄 A，B，C があって，**どの 2 つも同時には起こらない**とき，A，B，C の起こり方がそれぞれ l，m，n 通りあったとすると，A，B，C いずれかが起こる場合の数は $\boldsymbol{l+m+n}$ **通り** です。これを和の法則といいます。

215 目の和が 5 以下になるのは，目の和が 2，3，4，5 の 4 通りです。表を利用してすべてを書き上げるのも有力な解法の一つです。

216 使われた「0」から「9」までの数字の個数を桁数に応じて数えていきます。たとえば，2 桁の自然数は 10 から 99 までの 90 個あり，一の位の数字として 90 個，十の位の数字として 90 個，合わせて $2 \times 90 = 180$ 個が使われます。

217 「**4 の倍数 $\Longleftrightarrow$ 下 2 桁が 4 の倍数**」は覚えておいてもよいでしょう。下 2 桁に 0 を含むか含まないかで場合分けしましょう。

解答・解説

215 大小2つのサイコロを投げるとき，目の和が5以下になるのは

(i) 目の和が2となる組が (1，1) の1通り
(ii) 目の和が3となる組が (1，2)，(2，1) の2通り
(iii) 目の和が4となる組が (1，3)，(2，2)，(3，1) の3通り
(iv) 目の和が5となる組が (1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1) の4通り

あるから，求める場合の数は

$1+2+3+4=$ **10（通り）**

別解 大小2つのサイコロの目をそれぞれ a，b として $a+b$ の表をつくると，右の表となるから，$a+b \leqq 5$ となるのは10通りである。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

216 (i) 1桁の自然数は9個。

(ii) 2桁の自然数は90個あるので

$2 \times 90 = 180$（個）

(iii) 3桁の自然数は900個あるので

$3 \times 900 = 2700$（個）

(iv) 2001までの4桁の自然数は1002個あるので

$4 \times 1002 = 4008$（個）

以上より，使われた「0」から「9」までの数字は全部で

$9+180+2700+4008=$ **6897（個）**

217 「4桁の整数 $abcd$ が4の倍数」という条件は

「$1000a+100b+10c+d$ が4の倍数」

すなわち

「$4(250a+25b)+(10c+d)$ が4の倍数」

と読み替えることができ，さらにこれは

下2桁 cd が4の倍数

と考えればよいので，以下の場合に分けて考える。

(i) 下2桁に0を含む場合，つまり下2桁が04，20，40のとき，千の位と百の位は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通りあるから

$3 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 18$（個）

(ii) 下 2 桁が 12，24，32 の場合，いずれも千の位は 0 以外の 2 通り，百の位は残りの 2 通りがあるから

$3 \times 2 \cdot 2 = 12$（個）

(i)，(ii) より

$18 + 12 =$ **30（個）**

次に，2000 より大きな 4 の倍数は千の位が 2，3，4 のいずれかであるから

(iii) 下 2 桁が 04，20，40，12 のとき，いずれも千の位は 2 通りあり，百の位も考えて

$4 \times 2 \cdot 2 = 16$（個）

(iv) 下 2 桁が 24，32 のときは，どちらも千の位は 1 通りに決まる。百の位も考えて

$2 \times 1 \cdot 2 = 4$（個）

(iii)，(iv) より

$16 + 4 =$ **20（個）**

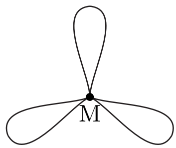
1.4　積の法則，一筆書き

問題

218 3 枚のカードがある。1 枚目のカードの両面にはそれぞれ 1 および 2 が書かれており，2 枚目のカードの両面にはそれぞれ 3 および 4 が書かれている。そして 3 枚目のカードの両面にはそれぞれ 7 および 8 が書かれている。このときこの 3 枚のカードを並べてできる 3 桁の整数は $\boxed{}$ 通りある。

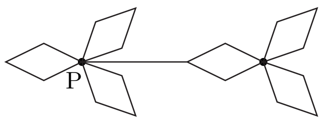
（東邦大）

219 右図のような三つ葉模様の中心 M を出発点として一筆書きをする方法は $\boxed{}$ 通りある。　（名城大）



220 右図について，点 P を出発点として一筆でかく方法は何通りあるか。ただし，右回り，左回りを区別するものとする。

（麻布大　改）



チェック・チェック

積の法則

事柄 A，B，C があって，A の起こり方が l 通り，**そのおのおのに対して** B が m 通り，さらに，A，B がともに起こったときの C の起こり方が n 通りのとき，A，B，C がともに起こる場合の数は $\boldsymbol{l \times m \times n}$ **通り** です。これを積の法則といいます。

218 3 枚のカードの並べ方おのおのに対して，各カードは表か裏の 2 通りの数字が対応します。

219 3 つのループをどう書くかです。一筆書きをどのループの順で行い，各ループを右回り，左回りのどちらで行うか決めます。

220 まずは P を含む 3 つの四角形をかいて隣の四角形に進みます。

解答・解説

218 3 枚のカードの並べ方が $3! = 6$ 通りあり，それぞれの並び方につき，各カードには裏表があるので，3 桁の整数は $6 \times 2^3 =$ **48**（通り）ある。

219 3 つの葉を選ぶ順序は

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{（通り）}$$

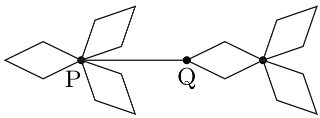
各ループは右回りに書くか左回りに書くかで，それぞれ 2 通りの方法がある。
よって，一筆書きの方法は全部で

$$6 \times 2^3 = \mathbf{48} \text{（通り）}$$

別解 葉と回り方を考えて

$$3 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 = 48 \text{（通り）}$$

220 右図で点 P を出発点として，左側の 3 つの四角形を一筆書きする方法は右回り，左回りも区別するから



$$3! \times 2^3 = 6 \times 8 = 48 \text{（通り）}$$

次に，P から Q に進んで（1 通り），最後に Q を出発点として，右側の 3 つの四角形を一筆書きする。この方法は

$$2 \times 2 \cdot 2^2 = 16 \text{（通り）}$$

よって，求める一筆書きの方法は

$$48 \times 1 \times 16 = \mathbf{768} \text{（通り）}$$

別解 四角形と回り方を考えて

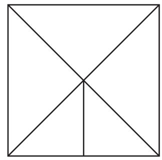
$$(3 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \cdot 2) \times 1 \times (2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \cdot 2) = 768 \text{（通り）}$$

1.5　塗り分け

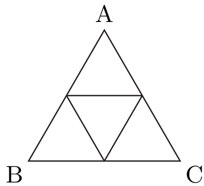
問題

221 右の図のように 5 つの三角形からなる領域を色分けしたい。隣りあった領域には異なる色を使い，指定された数だけの色はすべて使うものとする。このとき，塗り分け方は，それぞれ何通りあるか。

(1) 5 色　(2) 4 色　(3) 3 色　（奈良大）



222 正三角形 ABC を図のような 4 つの合同な正三角形に分け赤，白，青，黄の 4 色のうち任意の 3 色を用いて塗り分ける。隣りあう正三角形の色が異なるような塗り分け方は全部で何通りあるか。（自治医科大）



チェック・チェック

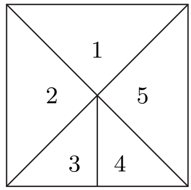
隣り合った領域を異なる色で塗るという条件で，世界地図は何色で塗り分けることができるか？という有名な問題（4 色問題）がありましたが，これは 1976 年に大型コンピュータを使って解決しています。

221 隣り合う領域には同じ色は塗らないというのが，この手の問題のポイントです。各領域の塗る順序を決めて積の法則を利用して数えていきましょう。

222 用いる 3 色を決めたあとは，隣り合う正三角形の色が異なることから，まずは中央の三角形を塗ります。

解答・解説

221 各領域に右のように番号をつける。



(1) 5 色を使って番号順に色を塗っていけばよいから

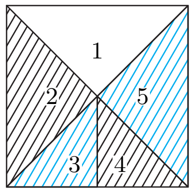
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ **120（通り）**

(2) 4 色で塗り分けるには同じ色を 2 か所に塗ることになる。同じ色となる領域の決め方は

(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5)

の 5 通りある。あとは，たとえば (1, 3), 2, 4, 5 の順に 4 色を使って塗っていけばよいから

$5 \times 4! =$ **120（通り）**

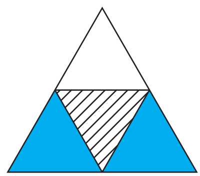


(3) 1 色のみが 1 か所に塗られ，この領域が決まれば，残り 4 か所は同じ色となる対に分かれる。たとえば 1, (2, 4), (3, 5) という順に 3 色を使って塗っていけば
よいから

$5 \times 3! =$ **30（通り）**

222 4 色の中から 3 色の色を選ぶ選び方が ${}_4C_3 = 4$ 通りあり，それに応じた中央の正三角形の塗り方が 3 通りある。隣り合う正三角形の色が異なるように塗るためには残り 3ヵ所を 2 色で塗るので，どの正三角形をどちらの色で塗るかを考えると，${}_3C_2 \times 2 = 6$ 通りの塗り方ができるから

$4 \times 3 \times 6 =$ **72（通り）**



1.6　かく乱順列

問題

223 四つの箱と四つの玉にそれぞれ 1, 2, 3, 4 の番号が付けてある。箱の番号と玉の番号が異なるようにして，それぞれの箱に一つずつ玉を入れるとする。このような入れ方は何通りあるか求めなさい。　（東京電機大）

224 5 人の客がホテルのフロントにそれぞれコートをあずけ，帰りに，2 人だけがそれぞれ自分のコートを受け取り残り 3 人がそれぞれ自分と異なるコートを渡される場合の数は $\boxed{}$ で，すべての 5 人がそれぞれ自分のコートと異なるコートを渡される場合の数は $\boxed{}$ である。　（東北学院大）

チェック・チェック

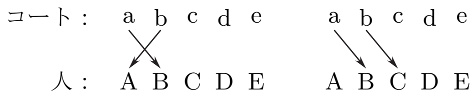
n 枚のカードを並べかえるとき，n 枚すべてが元の位置にない並べ方は何通りか？これは n 枚のかく乱順列（完全順列）と呼ばれている問題で，1708 年にモンモールが提出した問題であり，オイラーが解決しています。n 枚についての解答は漸化式を用いることになりますが，5 枚くらいなら数え上げることができます。

223 箱 1, 2, 3, 4 に玉 2, 3, 4, 1 がこの順に入ることを (2, 3, 4, 1) とかくと

(2, □, □, □)　(3, □, □, □)　(4, □, □, □)

の 3 通りに分かれます。

224 A, B, C, D, E の 5 人が異なるコートを渡される場合の数は，A のコート a が誰かに渡され，コート a を渡された人のコートが誰に渡されるかと考えると



と大きく 2 つに分かれます。

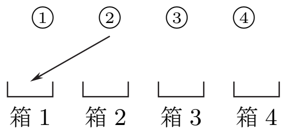
解答・解説

223 1 番の箱に 2 の玉が入るとき 2，3，4 の箱に入る玉は

$(3,\ 4,\ 1)$，$(4,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 4,\ 3)$

の 3 通り。1 番目の箱に 3，4 の玉が入る場合も同様なので

$3 \times 3 =$ **9（通り）**



224 5 人のうち自分のコートを受け取る 2 人の選び方は

${}_5C_2 = 10$（通り）

残りの 3 人 A，B，C が自分のコート a，b，c と異なるコートを受け取るとき，その方法は，A，B，C に対して

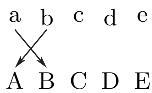
(b，c，a)，(c，a，b)

の 2 通り。したがって

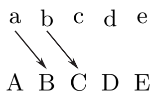
$10 \times 2 =$ **20（通り）**

　次に，すべての 5 人が異なるコートを渡される場合の数を求める。コート a の渡され方は，B，C，D，E への 4 通りある。コート a が B に渡されたとし，次にコート b の渡され方を考える。

(i) コート b が A に渡されるとき，残りの 3 人のコートの渡され方は 2 通り。



(ii) コート b が A 以外の人に渡されたとき，この渡し方は 3 通りある。
　いま，C に渡されたとしよう。次にコート c の渡され方は A，D，E への 3 通りあり，コート c の渡され方が決まると，残り 2 つのコートの渡され方は 1 通りに決まる。



よって，求める場合の数は

$4 \times (2 + 3 \times 3 \times 1) =$ **44（通り）**

別解 すべての 5 人が異なるコートを渡される場合について，自分のコートを受け取る人数を 1，2，3，5 で場合分けすると

1 人：${}_5C_1 \times 9 = 45$（通り）　　2 人：20（通り）

3 人：${}_5C_3 \times 1 = 10$（通り）　　5 人：1（通り）

コートの渡され方は全部で $5!$ 通りあるから，求める場合の数は

$5! - (45 + 20 + 10 + 1) = 44$（通り）

1.7　支払金額，支払方法

問題

225 (1) 10 円硬貨 3 枚と 100 円硬貨 1 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある。

(2) 10 円硬貨 5 枚と 100 円硬貨 14 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある。

(3) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 5 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある。

(4) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 3 枚，および 500 円硬貨 3 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある。　（京都産業大）

226 千円札を 5 枚，二千円札を 5 枚，五千円札を 5 枚，一万円札を 2 枚，合計 6 万円をもっている人が，おつりの出ない買い物をした。

(1) 買い物の金額がちょうど 1 万円のとき，紙幣の組合せ方は全部で $\boxed{}$ 通りある。

(2) 買い物の金額がちょうど 2 万円のとき，支払った紙幣の枚数が 8 枚以下である組合せ方は全部で $\boxed{}$ 通りある。

(3) 買い物をした後で，手元に残った紙幣の枚数が 10 枚，その合計金額が 1 万 6 千円以上であったとき，支払った金額の最小値は $\boxed{}$ 万 $\boxed{}$ 千円で，最大値は $\boxed{}$ 万 $\boxed{}$ 千円である。

チェック・チェック

225 数枚の硬貨をもっているとき，何種類の支払いが可能か。
(1)，(2) 同じ種類の硬貨を何枚使うかを考えるのがよいでしょう。
(3)，(4) 10 円硬貨 10 枚と 100 円硬貨 1 枚はどちらも 100 円で金額としては一致します。この手のダブリに注意しましょう。

226 (1) 1 万円を支払うのに何通りの支払い方があるか。お札の枚数に着目して，千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ a 枚，b 枚，c 枚，d 枚とすると

$$\begin{cases} 1000a+2000b+5000c+10000d=10000 \\ 0 \leqq a \leqq 5,\quad 0 \leqq b \leqq 5,\quad 0 \leqq c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \end{cases}$$

をみたす整数解 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数を求める問題になります。

(2) (1) の利用を考えます。

(3) 手元に残った枚数が 10 枚で残高合計が 1 万 6 千円以上であるから，支払い金額を考えると

$$\begin{cases} a+b+c+d=7 \\ 1000a+2000b+5000c+10000d<60000-16000 \\ 0 \leqq a \leqq 5,\quad 0 \leqq b \leqq 5,\quad 0 \leqq c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \end{cases}$$

が与えられた条件です。

解答・解説

225 (1) 10 円硬貨 3 枚と 100 円硬貨 1 枚の中から 1 枚以上を用いてできる金額は

　　10，20，30，100，110，120，130

の **7（通り）** である。

別解 10 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚の 4 通りであり，100 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚の 2 通りである。1 枚も使わない場合を除くから

$$4 \times 2 - 1 = 7 \text{（通り）}$$

(2) 10 円硬貨 5 枚と 100 円硬貨 14 枚の中から 1 枚以上を用いることから

　　10 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚, ⋯ ，5 枚の 6 通り
　　100 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚, ⋯ ，14 枚の 15 通り

ともに，1 枚も使わない場合を除くと

$$6 \times 15 - 1 = \mathbf{89} \text{（通り）}$$

(3) 10 円硬貨 9 枚，100 円硬貨 5 枚の使い方はそれぞれ 10 通り，6 通りである。
1 枚も使わない場合を除くと

$$10 \times 6 - 1 = 59 \text{ 通り}$$

これは，10 円，20 円，30 円, ⋯ ，590 円を表しているから，残りの 10 円硬貨 5 枚も合わせると

$$59 + 5 = \mathbf{64} \text{（通り）}$$

(4) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 3 枚で表せる金額は，0 円も含めると

$$10 \times 4 + 5 = 45 \text{（通り）}$$

さらに 500 円硬貨が 3 枚あるから，どの 1 枚も使わない場合を除くと

$$45 \times 4 - 1 = \mathbf{179} \text{（通り）}$$

226 千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ，a 枚，b 枚，c 枚，d 枚とすると

$$0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \quad \cdots\cdots ①$$

(1) $1000a + 2000b + 5000c + 10000d = 10000$ より

$$a + 2b + 5c + 10d = 10 \quad \cdots\cdots ②$$

①より

$$10d = 10 - (a + 2b + 5c) \leqq 10 \qquad \therefore \quad d \leqq 1$$

$d = 1$ のとき，②より

$$a = b = c = 0$$

$d = 0$ のとき，②より

$$a + 2b + 5c = 10$$
$$5c = 10 - (a + 2b) \leqq 10 \qquad \therefore \quad c \leqq 2$$

$c=2$ のとき，$a=b=0$
$c=1$ のとき，$a+2b=5$ $\quad\therefore\quad (b,\ a)=(0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1)$
$c=0$ のとき，$a+2b=10$ $\quad\therefore\quad (b,\ a)=(5,\ 0),\ (4,\ 2),\ (3,\ 4)$
以上より

$$
\begin{aligned}
(a,\ b,\ c,\ d)=&(0,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 2,\ 0),\\
&(5,\ 0,\ 1,\ 0),\ (3,\ 1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 1,\ 0),\\
&(0,\ 5,\ 0,\ 0),\ (2,\ 4,\ 0,\ 0),\ (4,\ 3,\ 0,\ 0)
\end{aligned}
$$

なので，全部で **8（通り）** である。

(2) (1) より，ちょうど 1 万円となる組合せ方は，1 枚，2 枚，4 枚，5 枚，6 枚，7 枚の場合がある。たとえば，1 枚の場合 $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ と 2 枚の場合 $(0,\ 0,\ 2,\ 0)$ を組合せると，$(0,\ 0,\ 2,\ 1)$，つまり 3 枚で 2 万円の組合せができる。
したがって，8 枚以下となるのは，

(i) $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ とすべての組合せで 8 通り
(ii) $(0,\ 0,\ 2,\ 0)$ と 2 枚，4 枚，5 枚，6 枚のときの組合せで 6 通り
(iii) $(1,\ 2,\ 1,\ 0)$ と $(1,\ 2,\ 1,\ 0)$ の組合せで 1 通り（これは (ii) に含まれる）

の場合であり，$8+6=$ **14（通り）** である。

(3) **残った枚数が 10 枚**なので，支払いは 7 枚である。

$$a+b+c+d=7 \quad \cdots\cdots③$$

残高の合計金額が 1 万 6 千円以上より

$$1000a+2000b+5000c+10000d<60000-16000$$
$$a+2b+5c+10d<44 \quad \cdots\cdots④$$

支払い枚数は一定（7 枚）なので，**低額（高額）紙幣を多く使うほど支払い金額は小さく（大きく）なる**。

$a=5$ のときを考える。
③より，$b=2$ のとき $c=d=0$ であり，これらは④をみたす。
したがって，最小値は $1000\times 5+2000\times 2=9000$，つまり，**0 万 9 千円** となる。

次に，$d=2$ のときを考える。
③より，$a=5-(b+c)$ であり，④に代入して

$$b+4c<19$$
$$4c<19-b\leqq 19 \qquad \therefore\quad c<\frac{19}{4}$$

よって $c=4$ のとき金額は最大となる。このとき，$a+b=1$，$0\leqq b<3$，$0\leqq a\leqq 5$ なので，$a=0$，$b=1$ のときが最大。
したがって，最大値は

$$2000\times 1+5000\times 4+10000\times 2=42000,\ \text{つまり，}\ \textbf{4 万 2 千円}$$

となる。

2　順列・組合せ

2.1　重複順列，順列

問題

227 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 を用いてつくられる 3 桁の整数のうち，5 の倍数になる整数の個数を N とする。同じ数字を重複して用いてよい場合は $N = \boxed{}$ で，重複を許さない場合は $N = \boxed{}$ である。

（大阪電気通信大）

228 6 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 から重複を許して 4 個を取り出し，それらを並べて 4 桁の整数をつくる。千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，d とおく。次のような整数は，それぞれ何通りできるか。

(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$　（佐賀大）

229 7 個の数字 1，2，3，4，5，6，7 のうちの異なる 4 個の数字でできる 4 桁の整数の個数は $\boxed{}$ であり，そのうち奇数であるものの個数は $\boxed{}$ である。

（神奈川工科大）

230 0，1，2，3，4 の 5 個の数字のうち異なる数字を使って 3 桁の偶数をつくると $\boxed{}$ 通りできる。　（福岡歯科大）

231 7 個の数字 0，2，3，4，5，6，7 の中の異なる数字を使ってできる 3 桁の整数のうち，3 の倍数は $\boxed{}$ 個ある。　（中京大）

チェック・チェック

227 使う数字の重複を許す場合と許さない場合をセットにした問題です。どちらも積の法則を用いて説明できますが，結論をまとめておくと

重複順列：異なる n 個のものから，くり返し用いることを許して r 個をとって並べた順列の総数は $\boldsymbol{n^r}$ **通り**

順列：異なる n 個のものから，r 個をとって並べた順列の総数は

$$\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}\ \textbf{通り}$$

これは ${}_n\mathrm{P}_r$ と表され，${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n\,!}{(n-r)!}$ ともかけますね。

最高位に 0 は使えないことにも注意しましょう。

228 (1) a，d とは独立に b，c はどの数字を使ってもよいので，求める場合の数は
(a，d の場合の数) × (b の場合の数) × (c の場合の数)
です。

(2) $a<b<c<d$ のときと $a<b=c<d$ のときに分けて数えましょう。$a<b<c<d$ のとき，使う 4 つの数字が選ばれると，大小は自動的に定まります。

229 異なる 7 個の数字の中から 4 個をとってきて並べると 4 桁の整数をつくることができます。また，奇数となるのは一の位が奇数 1，3，5，7 のときです。

230 偶数となるのは一の位が偶数 0，2，4 のときです。最高位に 0 は使えないことにも注意しましょう。

231 3 の倍数であるかないかをどう判断しますか？3 桁の整数を

$$N = a\times 10^2 + b\times 10 + c\ (0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 9,\ a \neq 0)$$

とするとき

$$\boldsymbol{N\ \text{が}\ 3\ \text{の倍数} \iff a+b+c\ \text{が}\ 3\ \text{の倍数}}$$

ですが，証明できますか。次の変形をすればわかりますね。

$$\begin{aligned} N &= a\times(9+1)^2 + b\times(9+1) + c \\ &= 9\times(\text{整数}) + a + b + c \end{aligned}$$

解答・解説

227 同じ数字を重複して用いてよい場合，3 桁の 5 の倍数は一の位が 0 か 5 のどちらかであり，百の位は 0 を除く 5 つのいずれか，十の位は 6 つのいずれでもよいから

$N = 2 \times 5 \times 6 =$ **60（個）**

重複を許さない場合は，一の位が 0 か 5 かで場合分けする。

(i) 一の位が 0 のときは百の位が 1〜5 の 5 通り，十の位が残りの 4 通りであり

$5 \times 4 = 20$（個）

(ii) 一の位が 5 のときは百の位が 1〜4 の 4 通りで，十の位は 5 と百の位の数を除く残り 4 通りだから

$4 \times 4 = 16$（個）

したがって，重複を許さない場合の N は

$N = 20 + 16 =$ **36（個）**

228 (1) $a = 1$ のとき，$d = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 5 通りあり，同様に，$a = 2$ のときは d が 4 通り，$a = 3$ のときは d が 3 通り，$a = 4$ のときは d が 2 通り，$a = 5$ のときは d が 1 通りである。b，c はいずれの場合もそれぞれ 6 通りであるから

$$\begin{aligned} &5 \times 6 \times 6 + 4 \times 6 \times 6 + 3 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 + 1 \times 6 \times 6 \\ &= (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \times 6 \times 6 \\ &= \mathbf{540}\ \text{（通り）} \end{aligned}$$

(2) $a < b < c < d$ となる整数は 6 個の数字から異なる 4 個を選び小さい順に並べればよいので，${}_6\mathrm{C}_4$ 通り。

$a < b = c < d$ となる整数は 6 個の数字から異なる 3 個を選び，小さい順に並べ，まん中の数字を 2 回使えばよいので，${}_6\mathrm{C}_3$ 通りある。

以上より

$${}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 + 20 = \mathbf{35}\ \text{（通り）}$$

229 7 個の数から 4 個取り出してできる整数は

${}_7\mathrm{P}_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 =$ **840（個）**

そのうち奇数となるのは，一の位が 1，3，5，7 のいずれかのときであり，他の位は残りの 6 個の中から 3 個取り出して並べればよいから

$4 \times {}_6\mathrm{P}_3 = 4 \times 6 \times 5 \times 4 =$ **480（個）**

230 **偶数となるのは一の位が 0，2，4 のとき**である。

一の位が 0 のとき，百の位は 1〜4 の 4 通り，十の位は残り 3 通りであるから

$$1 \times 4 \times 3 = 12 \text{（通り）}$$

一の位が 2 または 4 のとき，百の位は 0 を除くので 3 通り，十の位は 0 を含めた残り 3 通りであるから

$$2 \times 3 \times 3 = 18 \text{（通り）}$$

$$\therefore \quad 12 + 18 = \mathbf{30} \textbf{（通り）}$$

231 **3 の倍数は各位の数字の和が 3 の倍数**であればよい。

$x < y < z$ としたとき，和が 3 の倍数となる 3 つの数の組 $\{x,\ y,\ z\}$ は

$\{0,\ 2,\ 4\}$，$\{0,\ 2,\ 7\}$，$\{0,\ 3,\ 6\}$，$\{0,\ 4,\ 5\}$，$\{0,\ 5,\ 7\}$，
$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 7\}$，$\{2,\ 4,\ 6\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，
$\{3,\ 4,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$，
$\{4,\ 5,\ 6\}$，
$\{5,\ 6,\ 7\}$

の 13 通りあり，0 を含むものは 5 通り，0 を含まないものは 8 通りある。0 を含むときは百の位に 0 はこないので

$$2 \cdot 2! \times 5 + 3! \times 8 = \mathbf{68} \textbf{（個）}$$

別解　7 個の数字 0，2，3，4，5，6，7 を 3 でわった余りで分類すると

余りが 0 の数の集合　$A_0 = \{0,\ 3,\ 6\}$
余りが 1 の数の集合　$A_1 = \{4,\ 7\}$
余りが 2 の数の集合　$A_2 = \{2,\ 5\}$

であり，異なる数字を使ってできる 3 桁の整数が 3 の倍数となるのは

(i) A_0 の 3 つの数字で 3 桁の整数をつくる
(ii) A_0，A_1，A_2 から 1 つずつ数字を選び 3 桁の整数をつくる

のいずれかである。最高位（百の位）に 0 がこないことに注意すると

(i)　$2 \times 2 \times 1 = 4$（通り）

(ii) (ア) A_0 から 0 を選ぶとき

A_0，A_1，A_2 の並び方が　$2 \times 2 = 4$（通り）
A_1，A_2 からの数字の選び方が　$2 \times 2 = 4$（通り）
$\therefore \quad 4 \times 4 = 16$（通り）

(イ) A_0 から 0 以外を選ぶとき

A_0，A_1，A_2 の並び方が　$3! = 6$（通り）
A_0，A_1，A_2 からの数字の選び方が　$2 \times 2 \times 2 = 8$（通り）
$\therefore \quad 6 \times 8 = 48$（通り）

よって，(ii) をみたすのは　$16 + 48 = 64$（通り）

(i)，(ii) を合わせると　$4 + 64 = 68$（個）

2.2 円順列

問題

232 男子 3 名，女子 4 名の生徒が手をつないで輪をつくるとき，次の各問に答えよ。

(1) 輪をつくる方法は何通りあるか。

(2) 男子 3 名が隣り合う並び方は何通りあるか。

(3) 男子が隣り合わない並び方は何通りあるか。（九州東海大）

233 (1) 立方体の各面に 1 から 6 の数字が書いてあり区別がつくとする。各面を赤か青かのいずれかに塗るとき，色の塗り方は何通りあるか。

(2) 立方体の各面に数字がなく区別がつかないものとする。各面を赤か青かのいずれかに塗るとき，色の位置関係だけに注目すると色の塗り方は何通りあるか。

(3) (2) と同じ条件で，赤と青と黄のうちのちょうど 2 色を用いて各面を塗る場合，色の塗り方は何通りあるか。（甲南大）

チェック・チェック

232 (1) 円順列の問題ですね。

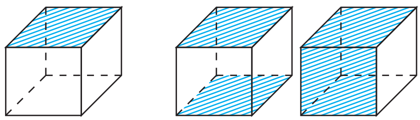
円順列：異なる n 個のものを円形に並べる順列の総数は $(n-1)!$ **通り**

(2) 隣り合うものはひとまとまりにして **1 つとみなす**とよいでしょう。

(3) 隣り合わないものは **2 段階操作**で考えるとよいでしょう。

233 各面に色を塗るだけの問題であり，塗り分け（隣り合う面は同じ色を使わない）とは違います。したがって，(1) は重複順列の問題です。
(2) 赤，青に塗られる面の数を（赤の面の数, 青の面の数）で表すとき，色の位置関係だけに注目しているので

(1, 5) のとき　(2, 4) のとき



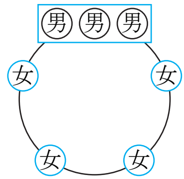
の 1 通り　　の 2 通り

があります。(3, 3) のときはどうでしょう？

解答・解説

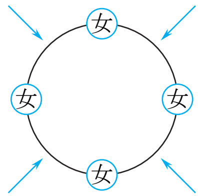
232 (1) 7 人で輪をつくる方法は

$(7-1)! = 6! = \mathbf{720}$ **（通り）**



(2) **男子 3 人をひとまとめ**にして，女子 4 人と男子 1 組の計 5 組で輪をつくり，男子 3 人の並び方を考えると

$(5-1)! \times 3! = \mathbf{144}$ **（通り）**



(3) 女子 4 人で**輪をつくっておき，4 つのすき間に男子 3 人を 1 人ずつ入れる**から

$(4-1)! \times 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \times 24 = \mathbf{144}$ **（通り）**

233 (1) 区別のつく各面はそれぞれ赤か青の 2 通りの塗り方があるから

$2^6 = \mathbf{64}$ **（通り）**

(2) 赤，青に塗られる面の数を（赤の面の数，青の面の数）として，塗り方を数えると

(0, 6)，(1, 5)，(5, 1)，(6, 0) のとき，それぞれ 1 通り
(2, 4)，(4, 2) のとき，どちらも 2 通り
(3, 3) のとき，2 通り

よって

$1 \times 4 + 2 \times 2 + 2 = \mathbf{10}$ **（通り）**

(3) 2 色の選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通りで，ちょうど 2 色を用いるから 1 色だけの(0, 6)，(6, 0)の場合を除いて

$3 \times (10-2) = \mathbf{24}$ **（通り）**

2.3　nCr

問題

234 (1) n 個から r 個とる組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

であることを示せ。　（広島大）

(2) $\dfrac{{}_{100}\mathrm{P}_5}{{}_{100}\mathrm{C}_{95}}$ を求めなさい。　（名古屋学院大）

235 (1) ${}_{12}\mathrm{C}_{10} + {}_{20}\mathrm{C}_{19} = \boxed{}$。ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ は n 個のものから r 個とった組合せの総数を表す。　（神奈川大）

(2) 2 以上の自然数 n に対して，${}_{4n}\mathrm{C}_2 = \boxed{}\,{}_n\mathrm{C}_2 + \boxed{}\,n^2$ が成り立つ。　（日本大）

236 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} = 35$ をみたす正の整数 n を求めよ。　（関西大）

チェック・チェック

234 組合せと順列の関係を確認しておきましょう。

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

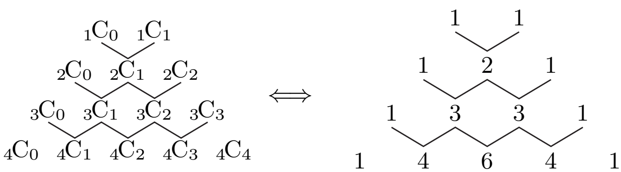
235 (1) 組合せの公式の計算練習です。

(2) 2 以上の自然数 n についての恒等式です。

236 左辺を直接計算してもよいのですが，パスカルの三角形に気づきますか？
すなわち，組合せの等式

$$ {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_r $$

を順次かいていくと，下図のような三角形ができます。



解答・解説

234 (1) n 個から r 個とって並べる順列の総数は

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) $$

これは n 個から r 個とって，その r 個を 1 列に並べる並べ方の総数 ${}_n\mathrm{C}_r \cdot r!$ に等しいので

$$ {}_n\mathrm{C}_r \cdot r! = {}_n\mathrm{P}_r $$

$$ \therefore \quad {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

（証終）

(2) ${}_{100}\mathrm{C}_{95} = {}_{100}\mathrm{C}_5 = \dfrac{{}_{100}\mathrm{P}_5}{5!}$ より

$$ \frac{{}_{100}\mathrm{P}_5}{{}_{100}\mathrm{C}_{95}} = {}_{100}\mathrm{P}_5 \times \frac{5!}{{}_{100}\mathrm{P}_5} = 5! = \underline{\mathbf{120}} $$

235 (1) ${}_{12}\mathrm{C}_{10} + {}_{20}\mathrm{C}_{19} = {}_{12}\mathrm{C}_2 + {}_{20}\mathrm{C}_1 = \dfrac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} + 20$

$$ = \underline{\mathbf{86}} $$

(2) $${}_{4n}\mathrm{C}_2 = \frac{4n(4n-1)}{2 \cdot 1} = 2n(4n-1) = 8n^2 - 2n \quad \cdots\cdots ①$$

また，A，B を定数として

$$ A\,{}_n\mathrm{C}_2 + Bn^2 = A \cdot \frac{n(n-1)}{2} + Bn^2 $$

$$ = \left(\frac{A}{2} + B\right)n^2 - \frac{A}{2}n \quad \cdots\cdots ② $$

2 以上の自然数 n に対して，①と②が等しくなるためには

$$ \begin{cases} \dfrac{A}{2} + B = 8 \\ \dfrac{A}{2} = 2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = 4 \\ B = 6 \end{cases} $$

したがって

$$ {}_{4n}\mathrm{C}_2 = \underline{\mathbf{4}}\,{}_n\mathrm{C}_2 + \underline{\mathbf{6}}\,n^2 $$

が成り立つ。

236 $$\begin{aligned} {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} &= {}_{n+1}\mathrm{C}_3 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{(n+1)n}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n+1)n}{6}\{(n-1)+3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

だから，${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} = 35$ のとき

$$(n+2)(n+1)n = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{n = 5}}$$

別解 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

より，以下，同じ。

2.4　組合せ

問題

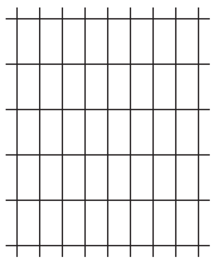
237 男子 7 名，女子 8 名の中からそれぞれ 2 名ずつ選んで男子 2 名，女子 2 名からなる 4 名のグループを作る方法は何通りあるか。　（湘南工科大）

238 男子 10 人，女子 5 人の中から合計 3 人の代表を選ぶ方法は $\boxed{}$ 通りある。また，代表 3 人のうちに女子が少なくとも 1 人含まれるような選び方は $\boxed{}$ 通りある。　（北海道工業大）

239 横一列に並んだ 7 つの箱がある。これに赤玉が隣り合わないように赤玉 3 個と白玉 4 個をそれぞれ 1 個ずつ入れると，$\boxed{}$ 通りの入れ方がある。　（立教大）

240 平面上に縦に 8 本の平行線が，横に n 本の平行線が並んでいて，1540 個の長方形ができるのは，$n = \boxed{}$ のときである。　（関西大）

241 右図のように，距離が 1 で等間隔に並んだ 9 本の平行な直線と，それに直交して距離が 2 で等間隔に並んだ 6 本の平行な直線とがある。縦 2 本と横 2 本の直線によって作られる正方形の個数を求めよ。　（長崎総合科学大）



チェック・チェック

237 男子 2 名の選び方おのおのに対して，女子 2 名が選ばれるので**積の法則**が使えます。

238 “少なくとも $\cdots$ ”ときたら，**余事象**を考えてみましょう。選び方全体から女子 0 人の選び方を除けばよいですね。

239 隣り合わないように並べるには **2 段階操作**を考えます。まず白玉を並べて，次に赤玉を間または両端に置いていきましょう。

240 **縦 2 本と横 2 本の平行線**を選べば長方形ができます。もちろん，正方形も長方形の 1 つとして考えます。

241 縦，横 2 本ずつ直線を選べば，1 つの長方形ができます。本問は正方形の個数です。正方形の辺の長さ 2，4，6，8 で**場合分け**して数え上げていきましょう。

解答・解説

237 男子 7 名から 2 名を選ぶ選び方は

$$_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{（通り）}$$

また，女子 8 名から 2 名を選ぶ選び方は

$$_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{（通り）}$$

よって，男子 2 名，女子 2 名からなる 4 名のグループをつくる方法は

$$21 \times 28 = \underline{\mathbf{588} \text{（通り）}}$$

238 男女合わせて 15 人から 3 人選ぶので

$$_{15}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{455} \text{（通り）}}$$

また，全員が男子である場合は男子 10 人から 3 人選ぶので

$$_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{（通り）}$$

よって，少なくとも 1 人女子が含まれるような選び方は

$$455 - 120 = \underline{\mathbf{335} \text{（通り）}}$$

別解 余事象を考えずに個々の場合を考えると次のようになる。

3 人とも女子の場合

$$_5C_3 = 10 \text{（通り）}$$

2 人が女子で 1 人が男子の場合

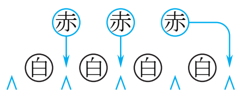
$$_5C_2 \times {}_{10}C_1 = 100 \text{（通り）}$$

1 人が女子で 2 人が男子の場合

$$_5C_1 \times {}_{10}C_2 = 225 \text{（通り）}$$

$$\therefore \quad 10 + 100 + 225 = 335 \text{（通り）}$$

239 白玉 4 個を並べてできるすき間 3 か所と両端 2 か所の計 5 か所のうちから赤玉が 1 つずつ入る 3 か所を選べばよいから



$$_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{10} \text{（通り）}}$$

240 **縦 2 本と横 2 本を選べば**長方形ができるので

$$ {}_8C_2 \times {}_nC_2 = 1540 $$

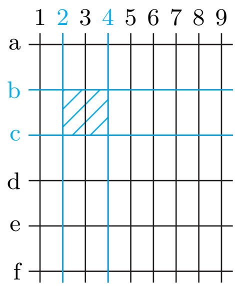
$$ \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 1540 $$

$$ n(n-1) = 110 $$

$$ n(n-1) = 11 \times 10 $$

$$ \therefore \quad \underline{\boldsymbol{n = 11}} $$

241 縦の線に 1〜9，横の線に a〜f の名前をつける。



1 辺の長さ 2 の正方形をつくる場合，縦の 2 本の組は

(1，3)，**(2，4)**，(3，5)，(4，6)，
(5，7)，(6，8)，(7，9) の 7 個

横の 2 本の組は

(a，b)，**(b，c)**，(c，d)，(d, e)，
(e，f) の 5 個

したがって，1 辺の長さ 2 の正方形の個数は

$7 \times 5 = 35$（個）

同様に，**1 辺の長さ 4 の正方形**は，縦の 2 本の組は

(1，5)，(2，6)，(3，7)，(4，8)，(5，9) の 5 個

横の 2 本の組は

(a，c)，(b，d)，(c，e)，(d，f) の 4 個

したがって，1 辺の長さ 4 の正方形の個数は

$5 \times 4 = 20$（個）

1 辺の長さ 6 の正方形は，縦の 2 本の組は

(1，7)，(2，8)，(3，9) の 3 個

横の 2 本の組は

(a，d)，(b，e)，(c，f) の 3 個

したがって，1 辺の長さ 6 の正方形の個数は

$3 \times 3 = 9$（個）

1 辺の長さ 8 の正方形は，縦の 2 本の組は (1，9) の 1 個，横の 2 本の組は (a，e)，(b，f) の 2 個だから，1 辺の長さ 8 の正方形の個数は

$1 \times 2 = 2$（個）

よって，正方形の個数は全部で

$35 + 20 + 9 + 2 =$ <u>**66（個）**</u>

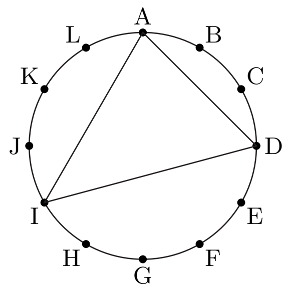
2.5　三角形の個数

問題

242 三辺の長さがそれぞれ 3cm，4cm，5cm である三角形を考え，各辺を 1cm 間隔に等分する。このときの分点（各辺の両端，即ち三角形の頂点を含む）の総数は $3+4+5=12$ であり，これらの 12 個の点のうちの 3 個の点を頂点とする三角形の総数は $\boxed{}$ である。　　（奈良県立医科大）

243 円周上に異なる 6 点がある。これから 3 点を選んで三角形 S を作る場合の数は $\boxed{}$ である。また，残りの 3 点で三角形 T を作ったとき，S と T の辺が 4 点で交わるような三角形 S の作り方は $\boxed{}$ 通りである。
（北海道工業大）

244 右図のように円周を 12 等分する点 A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，L が与えられている。



これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば，A，D，I を選べば，図のような三角形が得られる。

(1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

（九州大　改）

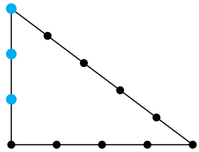
245 1 辺の長さが 1 の立方体の 3 つの頂点を結んでできる三角形について，次の問に答えよ。

(1) このような三角形の総数を求めよ。

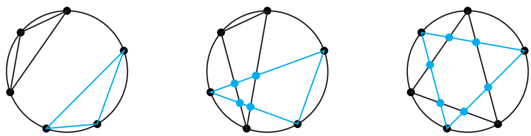
(2) 合同な三角形は同じ種類として，各種の三角形について，その 3 辺の長さおよびその総数を求めよ。　　（防衛大）

チェック・チェック

242 たとえば右図のように，3 個の点を同一直線上から選んだときは三角形とはなりません。3 点の選び方の総数から三角形とならない 3 点の選び方の総数を除きましょう。



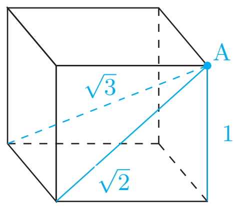
243 三角形 S と T の交点は次のような状態になります。



状態を 1 つ 1 つ調べていく姿勢も大切です。

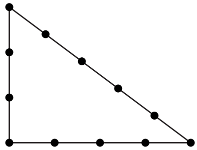
244 (2) 正三角形も二等辺三角形に含まれます。ダブって数えないように注意しましょう。
(3) 弦が直径となるときの円周角は 90° ですね。直径は全部で何本あるでしょうか。

245 (2) 右の図を見ながら，何種類の三角形ができるかイメージしてください。頂点 A を端点とする辺の長さは 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の 3 通りです。



解答・解説

242 12 個の点から異なる 3 点の選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_3$ 通りある。このうち三角形にならないのは，3 点が同一直線上にあるときである。



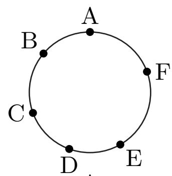
三角形にならない場合は

長さ 3cm の辺上には分点が 4 つあるので ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り
長さ 4cm の辺上には分点が 5 つあるので ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り
長さ 5cm の辺上には分点が 6 つあるので ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り

したがって，三角形の総数は

$$\begin{aligned}&{}_{12}\mathrm{C}_3-({}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3)\\ =\;&220-(4+10+20)=\underline{\mathbf{186}}\end{aligned}$$

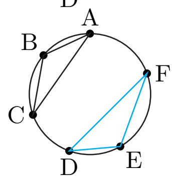
243 円周上の 6 点を，左回りに A，B，C，D，E，F とする。どの 3 点を選んでも三角形をつくることができるので，3 点を選んで三角形 S をつくる場合の数は



$${}_6\mathrm{C}_3=\underline{\mathbf{20}}$$

次に，S と T の辺が何点で交わるかを考える。

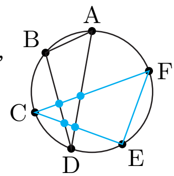
(i) {A，B，C} を選んで三角形 S を作ったとき，S と T の辺は交わらない。これは



{B，C，D}，{C，D，E}，{D，E，F}，{E，F，A}，{F，A，B}

を選んだときも同様である。

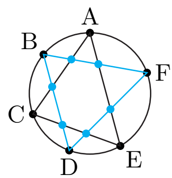
(ii) {A，B，D} を選んで三角形 S を作ったとき，S と T の辺は 4 点で交わる。これは



{A，B，E}，{B，C，E}，{B，C，F}，{C，D，F}，{C，D，A}，
{D，E，A}，{D，E，B}，{E，F，B}，{E，F，C}，{F，A，C}，
{F，A，D}

を選んだときも同様である。

(iii) {A，C，E} を選んで三角形 S を作ったとき，S と T の辺は 6 点で交わる。これは



{B，D，F}

を選んだときも同様である。

よって，求める三角形 S の作り方は，(ii) の

<u>**12（通り）**</u>

244 (1) $\{A,\ E,\ I\}$，$\{B,\ F,\ J\}$，$\{C,\ G,\ K\}$，$\{D,\ H,\ L\}$ の

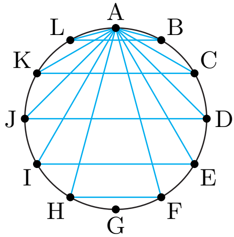
4（通り）

(2) 点 A を等しい 2 辺にはさまれる頂点としたとき，正三角形になる場合を除く二等辺三角形になるのは

$\{A,\ B,\ L\}$，$\{A,\ C,\ K\}$，$\{A,\ D,\ J\}$，
$\{A,\ F,\ H\}$

の 4 通りあり，他の頂点でも同様である。正三角形も二等辺三角形であるから

$4 \times 12 + 4 =$ **52（通り）**



別解 点 A を等しい 2 辺にはさまれる頂点とする二等辺三角形を，正三角形 AEI も含めて 5 通りと数えた場合，この正三角形は E および I を等しい 2 辺にはさまれる頂点とする正三角形としても数えられるから重複する正三角形を除いて

$5 \times 12 - 4 \times 2 = 52$（通り）

(3) 斜辺となるのは円の直径であり，これは 6 本ある。そのそれぞれに対して 10 通りの直角三角形をつくることができるので

$6 \times 10 =$ **60（通り）**

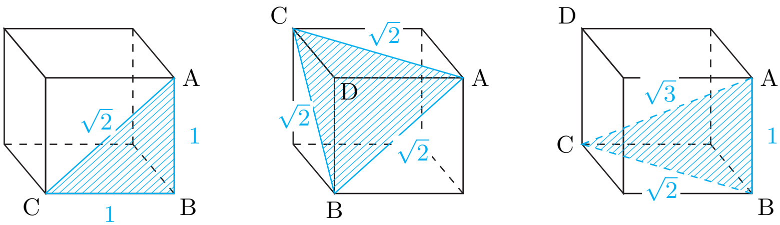
245 (1) どの 3 頂点を選んでも三角形となるので

${}_8C_3 =$ **56（通り）**

(2) 3 辺の長さは

$\{\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{2}}\}$，$\{\sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{2}}\}$，$\{\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{3}}\}$

の 3 種類に限られる。



$\{1,\ 1,\ \sqrt{2}\}$ の三角形は，1 辺 1 の正方形上に 4 つでき，全部で 6 面あるので，$4 \times 6 =$ **24 通り** ある。

$\{\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$ の三角形は，中央の図のように四面体 ABCD の底面をなすことにより，立方体の頂点の数に等しく **8 通り** ある。

$\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\}$ の三角形は，右上図のように 1 辺 AB を立方体と共有し，1 辺につき 2 つでき，辺は全部で 12 本あるので，$12 \times 2 =$ **24 通り** ある。

2.6　重複組合せ

問題

246 (1) 方程式 $x+y+z=28$ をみたす非負整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\boxed{}$ 個ある。（慶應義塾大）

(2) $x+y+z=10$ をみたす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 個ある。（東京工科大）

247 A，B，C の 3 つの学級から 5 人の委員を選び出す仕方は何通りあるか。ただし，委員が選ばれない学級があってもよい。（金沢経済大）

248 (1) 文字 x，y，z で作られる 4 次の単項式で異なるものの個数は $\boxed{}$ 個である。ただし，係数はすべて 1 とする。

(2) 文字 x，y，z で作られる 4 次の多項式の項数は最大で $\boxed{}$ 個である。ただし，係数はすべて 1 とする。（明治大）

チェック・チェック

整数解の個数は重複組合せの問題に置き換えられます。すなわち

$$\begin{cases} x+y+z=r \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$$

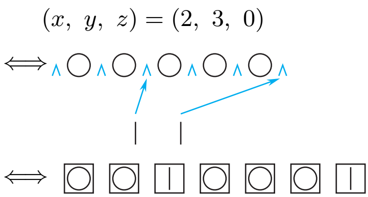
をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，異なる 3 種類の球がそれぞれ十分あって，何度同じ種類の球をとってもよいとして，合計 r 個をとるとり方の総数に一致します。一般には

重複組合せ：異なる n 種類のものから，くり返し用いることを許して r 個をとるとり方（組合せ）の総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ は

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \quad \text{（通り）}$$

これは r 個の球を並べておき，$n-1$ 本の仕切り棒を間または両端に入れる入れ方，すなわち，球 r 個，仕切り棒 $n-1$ 本の並び方に他なりません。$n+r-1$ ヵ所の場所から球を置く r 個の場所を選べばよいわけですから，求める総数は

$${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \text{ 通り}$$



246 (1) $\begin{cases} x+y+z=28 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1 \end{cases}$

をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めます。(1) の各整数は 0 以上で，(2) の各整数は 1 以上です。(1) と (2) の違いを理解しましょう。

247 各学級から a 人，b 人，c 人の委員が選ばれたとすると

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めます。

248 (1) x，y，z の 3 種類から 4 文字をとってつくられる単項式は x^4，x^3y，x^3z，x^2y^2，$\cdots$，z^4 の 4 次の斉次（同次）項であり，重複組合せの記号 H は homogeneous（斉次の）の頭文字をとっています。

(2) 4 次の多項式の中には 4 次，3 次，2 次，1 次，0 次（定数項）の単項式が含まれています。

解答・解説

246 (1) $\begin{cases} x+y+z=28 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，3 種類のものの中から重複を許してそれぞれ x 個，y 個，z 個 $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$ の合計 28 個をとるとり方の総数と同じであるから

$$ {}_3\mathrm{H}_{28} = {}_{3+28-1}\mathrm{C}_{28} = {}_{30}\mathrm{C}_{28} = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} $$
$$ = \underline{\mathbf{435}\text{（個）}} $$

別解 $z=0$ のとき，$x+y=28$ となる x，y の組は
$(x,\ y)=(0,\ 28),\ (1,\ 27),\ \cdots,\ (28,\ 0)$ の 29 組。
$z=1$ のとき，$x+y=27$ となる x，y の組は 28 組。
……
$z=28$ のとき，$x+y=0$ となる x，y の組は 1 組。
よって

$$ 29+28+\cdots+1 = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435\text{（個）} $$

（計算の仕方は数学 B の数列を参照せよ）

(2) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1 \end{cases}$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $X=x-1$，$Y=y-1$，$Z=z-1$ とおくと

$$ \begin{cases} X+Y+Z=7 \\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0 \end{cases} $$

をみたす整数の組 $(X,\ Y,\ Z)$ の個数と一致するから

$$ {}_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = \frac{9 \cdot 8}{2} = \underline{\mathbf{36}\text{（個）}} $$

別解 10 個の球を並べてできるすき間 9 か所から 2 か所選んで仕切り棒を入れる入れ方と同じなので，${}_9\mathrm{C}_2=36$ 個ある。

$\Longleftrightarrow (x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 5)$

別解 $z=1$ のとき，$x+y=9$ となる x，y の組は
$(x,\ y)=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ \cdots,\ (8,\ 1)$ の 8 組
$z=2$ のとき，$x+y=8$ となる x，y の組は 7 組。
……
$z=8$ のとき，$x+y=2$ となる x，y の組は 1 組。
したがって

$$ 8+7+6+\cdots+2+1 = 36\text{（個）} $$

247 A，B，C の 3 つの学級からそれぞれ a 人，b 人，c 人が選ばれたとすると

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を数えて

$${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{21}\ \text{（通り）}}$$

248 (1) 係数が 1 の 4 次の単項式 $x^p y^q z^r$ の個数は

$$\begin{cases} p+q+r=4 \\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の個数に一致するから

$${}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{15}\ \text{（個）}}$$

(2) 4 次の多項式の最大項数は，4 次，3 次，2 次，1 次，0 次（定数項）の単項式の個数をすべて加えればよいから

$$\begin{aligned} &{}_3\mathrm{H}_4 + {}_3\mathrm{H}_3 + {}_3\mathrm{H}_2 + {}_3\mathrm{H}_1 + {}_3\mathrm{H}_0 \\ =\ &{}_6\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_0 \\ =\ &15+10+6+3+1 \\ =\ &\underline{\mathbf{35}\ \text{（個）}} \end{aligned}$$

2.7　分配，組分け

問題

249 8 個の異なる品物を A，B，C の 3 人に分ける方法について，次の問いに答えよ。

(1) A に 3 個，B に 2 個，C に 3 個分ける方法は何通りあるか。

(2) 品物を 1 個ももらえない人がいてもよいとすれば，分け方は何通りあるか。

(3) A，B，C がいずれも，少なくとも 1 個の品物をもらう分け方は何通りあるか。（滋賀大）

250 9 人の学生を 3 つの組に分けたい。

(1) 3 人ずつ，3 つの組 A，B，C に分ける分け方は何通りあるか。

(2) 3 人ずつ，3 つの組に分ける分け方は何通りあるか。

(3) 2 人，2 人，5 人の 3 つの組に分ける分け方は何通りあるか。

251 男女 6 人ずつ 12 人を 4 人ずつ 3 つのグループに分ける。

(1) このような分け方は何通りあるか。

(2) 各グループが男女 2 人ずつとなるような分け方は何通りあるか。

(3) (2) のように分けるとき，女 A さんと男 B さんが同じ組になる分け方は何通りあるか。（学習院大）

チェック・チェック

品物と箱それぞれの区別がつくのかつかないのかで分けて整理してみましょう。まずは箱が A，B，C と区別される場合を考えます。

(I) 区別のつく n 個のものを，A，B，C の 3 つの箱に分ける分け方の数は，品物を①，②，$\cdots$，ⓝ として，各品物がどの箱に入るかを考えると，それぞれ 3 通りずつありますから（重複順列），3^n 通りです。（**249**(2)）

(II) 区別のつかない n 個のものを，A，B，C の 3 つの箱に分ける分け方の数は，A，B，C に入る品物の個数をそれぞれ a，b，c とすると

1 個も入らない箱があってもよいときは $\begin{cases} a+b+c=n \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases}$

どの箱にも少なくとも 1 個入るときは $\begin{cases} a+b+c=n \\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1 \end{cases}$

をみたす **整数解 $(a,\ b,\ c)$ の個数** と一致します。重複組合せの問題になりますね。

次に箱に区別がない場合を考えます。

(III) 区別のつく n 個のものを a 個，b 個，c 個 $(a+b+c=n)$ の 3 つの組（グループ）に分ける分け方の数は

a，b，c すべてが異なるときは　　${}_n\mathrm{C}_a \cdot {}_{n-a}\mathrm{C}_b$ 通り

でよいのですが，a，b，c のうち等しくなるものがあるときは注意が必要です。
たとえば

$a=b=c$ のときは　　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_a \cdot {}_{n-a}\mathrm{C}_b}{3!}$ 通り　（**250**(2)）

となります。

(IV) 区別のつかない n 個のものを 3 つの組（グループ）に分ける分け方の数については

$a+b+c=n$ をみたす集合 $\{a,\ b,\ c\}$ の個数

を求めることになります。シラミつぶしに数え上げましょう。

上の 4 つのタイプにおさまる問題だけではありませんね。各問題にいろいろな条件がついてきます。解き方のパターンを覚えようとするのではなく，その問題に応じて頭を使って数え上げる練習をしましょう。

解答・解説

249 (1) 8 個の品物を A に 3 個，B に 2 個，C に 3 個分けるので，まず A が 8 個の中から 3 個をとり，次に B が残りの 5 個から 2 個をとり，最後に C が残りの 3 個をとればよく

$${}_8C_3 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{5\cdot4}{2\cdot1} \times 1 = \underline{\mathbf{560}\textbf{（通り）}}$$

(2) 8 個の品物は誰のところにいってもよいので，8 個の品物はそれぞれについて持ち主は A，B，C のいずれかとなる。したがって

$$3^8 = \underline{\mathbf{6561}\textbf{（通り）}}$$

(3) (2) の中で，品物が **1 人に集まる場合**は 3 通りある。

2 人に集まる場合を考える。まず，3 人のうち 2 人の選び方は ${}_3C_2$ 通り。8 個の品物を 2 人に分ける分け方は 2^8 通りあり，そのうちいずれか 1 人に集まる場合が 2 通りある。

よって，2 人に集まる場合は

$${}_3C_2(2^8-2) = 3\times254 = 762\text{（通り）}$$

あるので，これらを除いて

$$6561-3-762 = \underline{\mathbf{5796}\textbf{（通り）}}$$

250 (1) 組に区別があるので，まず A 組に 9 人の中から 3 人を分けて，次に B 組に残りの 6 人の中から 3 人を分けて，残りの 3 人を C 組に分ければよいから

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times 1 = 84\times20 = \underline{\mathbf{1680}\textbf{（通り）}}$$

(2) (1) で組に区別がない場合なので，A，B，C の順序である **3!でわる** と

$$1680 \div \mathbf{3!} = \underline{\mathbf{280}\textbf{（通り）}}$$

別解 9 人のうちの **特定の 1 人がどの 2 人と組むか** を決めて

$${}_8C_2\text{（通り）}$$

残り 6 人のうちの特定の 1 人がどの 2 人と組むかを決めて

$${}_5C_2\text{（通り）}$$

残った 3 人で最後の組が決まるから

$${}_8C_2 \times {}_5C_2 = \frac{8\cdot7}{2} \times \frac{5\cdot4}{2} = 280\text{（通り）}$$

(3) 3 つの組を A，B，C とし，A に 2 人，B に 2 人，C に 5 人とすると，9 人の分け方は ${}_9C_2 \times {}_7C_2$ 通りあるが，A 組と B 組の区別はないので

$$\frac{{}_9C_2 \times {}_7C_2}{\mathbf{2!}} = \frac{36\times21}{2} = \underline{\mathbf{378}\textbf{（通り）}}$$

別解 9 人の中から 5 人の組をつくる方法は

$${}_9C_5\text{ 通り}$$

残り 4 人のうちの特定の 1 人が誰と組むかを決めて

$${}_3C_1\text{ 通り}$$

残った 2 人で最後の組が決まるから

$${}_9C_5 \times {}_3C_1 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times 3 = 378\text{（通り）}$$

251 (1) 4 人ずつ 3 つのグループに分ける方法は

$$\frac{{}_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4}{\mathbf{3!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= \frac{11 \cdot 5 \cdot 9 \times 7 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$
$$= \underline{\mathbf{5775}\ \text{（通り）}}$$

別解 12 人のうち特定の 1 人がどの 3 人と組むかを決めて

$${}_{11}C_3\ \text{（通り）}$$

残り 8 人のうちの特定の 1 人がどの 3 人と組むかで

$${}_7C_3\ \text{（通り）}$$

残った 4 人で最後のグループが決まるから

$${}_{11}C_3 \times {}_7C_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5775\ \text{（通り）}$$

(2) 男子を 2 人ずつ 3 つのグループに分ける方法は

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{\mathbf{3!}} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15\ \text{（通り）}$$

このそれぞれに，女子を 2 人ずつ組合せていくと

$$15 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \underline{\mathbf{1350}\ \text{（通り）}}$$

別解 男子 2 人ずつの 3 つのグループに分ける方法と女子 2 人ずつの 3 つのグループに分ける方法はともに

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15\ \text{（通り）}$$

であり，男子のグループと女子のグループの組合せ方は 3! 通りあるから

$$15 \times 15 \times 3! = 1350\ \text{（通り）}$$

(3) A さんと B さんが入る組の男女 1 人ずつを決めて，残りの 8 人を男女 2 人ずつの 2 つのグループに分ければよいから

$$({}_5C_1 \cdot {}_5C_1) \times \frac{{}_4C_2}{\mathbf{2!}} \times {}_4C_2 = \underline{\mathbf{450}\ \text{（通り）}}$$

2.8　同じものを含む順列

問題

252 A，A，B，B，B，B，B，B，B の文字が 1 つずつ書いてあるカードが 9 枚ある。これらのカードを 1 から 9 までの番号のついた 9 個の箱に 1 枚ずつ入れる方法は $\boxed{}$ 通りある。

A，A，B，B，B，C，C，C，C の文字が 1 つずつ書いてあるカードが 9 枚ある。これらのカードを 1 から 9 までの番号のついた 9 個の箱に 1 枚ずつ入れる方法は $\boxed{}$ 通りある。（日本大）

253 internet のすべての文字を使ってできる順列は $\boxed{}$ 通りあり，そのうちどの t も，どの e より左側にあるものは $\boxed{}$ 通りである。（法政大）

254 (1) 7 個の数字 1，2，2，3，3，4，4 を 1 列に並べる。このとき，偶数番目がすべて奇数になるような並べ方は $\boxed{}$ 通りある。（中部大）

(2) 8 個の数字 3，3，3，3，8，8，8，0 を 1 列に並べて作られる 8 桁の整数の総数は，$\boxed{}$ 個である。（金沢工業大）

255 (1) 赤玉 1 個，青玉 4 個，白玉 4 個がある。同じ色の玉は区別しないものとする。これら 9 個の玉を左から右へ 1 列に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りであり，そのうち左右対称になる並べ方は $\boxed{}$ 通りである。また，円形に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りである。（大阪電気通信大）

(2) 赤玉 3 個，青玉 4 個，白玉 2 個を一列に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りあり，円周上に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りある。ただし，同じ色の玉は区別しないとする。（東邦大）

チェック・チェック

252 同じものを含む順列には次の公式があります。

a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものがあるとき，
これら n 個のものを 1 列に並べる並べ方の総数は

$$
\begin{aligned}
&{}_{n}\mathrm{C}_{p} \times {}_{n-p}\mathrm{C}_{q} \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_{r} \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!\,(n-p-q)!} \times \frac{(n-p-q)!}{r!\,(n-p-q-r)!} \\
&= \frac{n!}{p!\,q!\,r!} \text{（通り）} \qquad (p+q+r=n)
\end{aligned}
$$

253 i，r が 1 個ずつ，n，t，e はどれも 2 個ずつあります。

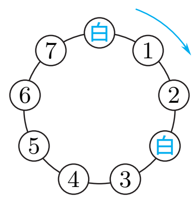
最初の空欄は公式の適用です。t，t，e，e において，どの t もどの e より左側にあるように並べるには，□□□□の 4 つを空箱としてまず並べ，次に 4 つの空箱の中に t，t，e，e の順に文字を入れればよいでしょう。

254 (1) 偶数番目と奇数番目に分けて 2 段階操作で並べましょう。

(2) 最高位に 0 は置けませんね。

255 (1) 同じものを含む円順列については公式はありません。赤球の位置を固定して，残り 8 個を並べましょう。

(2) これもまず白玉 2 個の位置を固定してしまいましょう。たとえば，白玉の位置を右の図のように固定すれば，残り 7 個の順列になります。



解答・解説

252 A，A，B，B，B，B，B，B，B を番号のついた 9 個の箱に入れる入れ方の総数は，これらを 1 列に並べる並べ方の総数に等しく

$$\frac{9!}{2!\,7!}=\underline{\mathbf{36}\text{（通り）}}$$

A，A，B，B，B，C，C，C，C を番号のついた 9 個の箱に入れる入れ方の総数は，これらを 1 列に並べる並べ方の総数に等しく

$$\frac{9!}{2!\,3!\,4!}=\underline{\mathbf{1260}\text{（通り）}}$$

別解 9 個の箱から 2 個選んでカード A を入れ，残りの箱にはカード B を入れるとして

$${}_9C_2=36\text{（通り）}$$

また，9 個の箱から 2 個選んでカード A を入れ，残り 7 個の箱から 3 個選んでカード B を入れ，残り 4 個の箱にはカード C を入れるとして

$${}_9C_2\times{}_7C_3=1260\text{（通り）}$$

253 internet の文字には n，e，t が 2 つずつ重複しているので，これら 8 個の文字を使ってできる順列は

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!}=\underline{\mathbf{5040}\text{（通り）}}$$

また，□，□，□，□，n，n，i，r の 8 文字を並べて，4 個の□の中に t，t，e，e をこの順に入れればどの t もどの e より左側にあるように並ぶから

$$\frac{8!}{4!\,2!}=\underline{\mathbf{840}\text{（通り）}}$$

254 (1) 2，4，6 番目に「1，3，3」を並べ，1，3，5，7 番目に「2，2，4，4」を並べればよいので

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!2!}=3\times6=\underline{\mathbf{18}\text{（通り）}}$$

(2) 最高位は 0 でないから，0 を除く 7 個の数字を一列に並べ，その間または右端に 0 を入れれば 8 桁の数字ができる。よって

◯∧◯∧◯∧◯∧◯∧◯∧◯∧

$$\frac{7!}{4!\,3!}\times7=\underline{\mathbf{245}\text{（個）}}$$

別解 最高位の千万の位には 0 が入らないから，3 か 8 のいずれかである。

最高位が 3 のとき，3 個の 3 と 3 個の 8 と 1 個の 0 を一列に並べればよいから

$$\frac{7!}{3!\,3!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} = 140\ (\text{通り})$$

最高位が 8 のとき，4 個の 3 と 2 個の 8 と 1 個の 0 を一列に並べればよいから

$$\frac{7!}{4!\,2!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{2} = 105\ (\text{通り})$$

したがって，8 桁の整数の総数は

$$140 + 105 = 245\ (\text{個})$$

あるいは，4 個の 3，3 個の 8，0 の 8 個の数字の並べ方の総数から，左端が 0 となる 8 個の数字の並べ方の総数を除いてもよい。

$$\frac{8!}{4!3!} - \frac{7!}{4!3!} = (8-1)\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 245\ (\text{個})$$

255 (1) 1 列に並べる並べ方は

$$\frac{9!}{4!4!} = \underline{\mathbf{630}\ (\text{通り})}$$

左右対称になるとき，左から 5 番目は赤玉である。さらに，左から 1，2，3，4 番目に青玉 2 個，白玉 2 個を並べれば，左から 6，7，8，9 番目の青玉 2 個，白玉 2 個の並び方が 1 通りに決まるので

$$\frac{4!}{2!2!} = \underline{\mathbf{6}\ (\text{通り})}$$

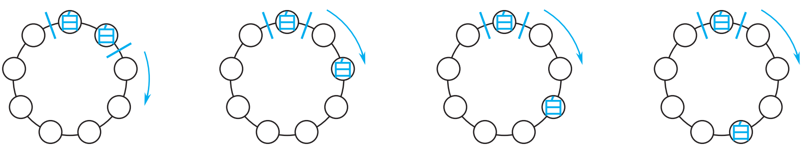
また，円形に並べる並べ方は，赤玉の位置を固定すると，青玉 4 個と白玉 4 個の順列を考えればよく

$$\frac{8!}{4!4!} = \underline{\mathbf{70}\ (\text{通り})}$$

(2) 一列に並べる並べ方は

$$\frac{9!}{3!\,4!\,2!} = \underline{\mathbf{1260}\ (\text{通り})}$$

円周上に並べる並べ方は，**白玉の位置を固定する**と，次の 4 通りのいずれかである。



いずれの場合も，赤玉 3 個と青玉 4 個の順列を考えればよく

$$4 \times \frac{7!}{3!\,4!} = \underline{\mathbf{140}\ (\text{通り})}$$

2.9 隣り合う順列，隣り合わない順列

問題

256 A，B，C，D，E の 5 文字を一列に並べることにする。何も条件がないときは，並べ方は $\boxed{}$ 通りある。A と E が隣り合う並べ方は $\boxed{}$ 通りあり，A と E が隣り合わない並べ方は $\boxed{}$ 通りある。また，A と E が両端にある並べ方は $\boxed{}$ 通りある。（広島修道大）

257 7 個の文字 A，B，C，D，E，F，G を 1 列に並べるとき，A と B が隣り合う並べ方は $\boxed{}$ 通りである。A と B が隣り合わず，かつ，A と C が隣り合わない並べ方は $\boxed{}$ 通りである。（南山大）

258 K，O，H，O，G，A，K，K，A の 9 文字を用いて作られる順列のうちで，3 個の K のうちの 2 個が 1 個ずつ両端にある場合について考える。O の 2 文字が隣り合い，A の 2 文字も隣り合う順列は，$\boxed{}$ 通りあり，O の 2 文字が隣り合うが，A の 2 文字は隣り合わない順列は，$\boxed{}$ 通りある。（文教大　改）

259 碁石の黒石 12 個と白石 3 個を 1 列に並べる。その際，白石は両端にはこず，白石の両隣は必ず黒石とする。また黒石の隣には少なくとも 1 個の黒石がくる。このような石の並べ方は $\boxed{}$ 通りある。（徳島文理大）

260 1，1，2，2，3，4，5 の 7 個の数字を全部使って横に並べるとき，1 の右隣りか左隣りの少なくとも一方には 2 があり，2 の右隣りか左隣りの少なくとも一方には 1 がある並べ方は何通りか。（宇都宮大）

チェック・チェック

隣り合うものは**ひとかたまり**に，隣り合わないものは**2 段階操作**で考えてみるとよいでしょう。

あるいは，並べ方全体から**隣り合うものを除く**という考え方で隣り合わないものを数えることもできます。

256 隣り合う A と E をひとかたまりとみると $\boxed{\text{AE}}$, $\boxed{\text{EA}}$ の 2 通りがあります。A と E が隣り合わない並べ方の総数は，並べ方全体から隣り合うものを除くとよいでしょう。

257 後半は，A と B が隣り合う事象を B，A と C が隣り合う事象を C とすると，求める場合の数は

$$\begin{aligned} n(\overline{B}\cap\overline{C}) &= n(\overline{B\cup C}) = n(\Omega) - n(B\cup C) \\ &= n(\Omega) - \{n(B) + n(C) - n(B\cap C)\} \end{aligned}$$

258 K 2 個が 1 個ずつ両端にあるので，実質 K，H，G，O，O，A，A の 7 文字の順列です。

259 ●○●○●○●…●は「白石の両隣りは必ず黒石」にはなっていますが,「黒石の隣には少なくとも 1 個の黒石がくる」という条件をみたしていません。
●●○●●○●●○●●…●と並ぶと条件をみたします。さてどうしましょう？

260 1，1，2，2 の条件をみたす並べ方を考えてみましょう。あとは，隣り合うものをひとかたまりにみて考えます。

解答・解説

256 5 つの文字の並べ方は

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **120（通り）**

A と E が隣り合うのは AE と EA の 2 通りがあり，この **2 つの文字をセット**にしたものと，残りの B，C，D の 4 つの順列を考えると

$2 \times 4! =$ **48（通り）**

よって，A と E が隣り合わない並べ方は

$120 - 48 =$ **72（通り）**

また，A と E が両端にある並べ方は，A と E を並べてから残りの 3 文字を並べればよいので

$2 \times 3! =$ **12（通り）**

別解 A と E が隣り合わないように並べるには，B，C，D を並べて，すき間または両端の 4 か所に A と E を 1 つずつ入れていけばよい。

$3! \times 4 \cdot 3 = 72$（通り）

257 A と B が隣り合うのは AB，BA の 2 通りあり，この **2 つの文字をセット**にして，残りの 5 文字と合わせた 6 つの並べ方を考えると

$2 \times 6! =$ **1440（通り）**

A と B，A と C が隣り合う並べ方はどちらも 1440 通り，A が B，C の両方と隣り合う並べ方は BAC，CAB のどちらかで，$2 \times 5! = 240$ 通りある。よって

$7! - (1440 + 1440 - 240) = 5040 - 2640 =$ **2400（通り）**

別解 後半は，A が右端にくる場合，その隣りにくるのは B，C を除く 4 つのいずれかで，A が左端にくる場合も同様だから

$2 \times 4 \times 5! = 960$（通り）

A が両端以外の場所にあるときは，A の両隣に D，E，F，G のいずれか 2 つがくる。この 3 文字のセットと残りの 4 文字の 5 つの順列を考えて

${}_4P_3 \times 5! = 1440$（通り）

したがって，求める並べ方は

$960 + 1440 = 2400$（通り）

258 **O の 2 文字と A の 2 文字をセット**にして考えると，両端はともに K なので，$\boxed{\mathrm{OO}}$，$\boxed{\mathrm{AA}}$，K，H，G という 5 つの文字の順列となり

$$5! = \underline{\mathbf{120}\ \text{（通り）}}$$

O の 2 文字をセットにして考えると，$\boxed{\mathrm{OO}}$，A，A，K，H，G という 6 つの文字の順列となる。ここから A が隣り合う場合をひいて

$$\frac{6!}{2!} - 120 = 360 - 120 = \underline{\mathbf{240}\ \text{（通り）}}$$

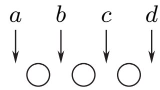
259 両端は黒石である。黒，白，黒の順に並べたものを A として，3 個の A と残り 4 個の黒石を並べればよく

A = ●○● として

● $\boxed{\text{AAA ●●●●}}$ ●

$$\frac{7!}{3!\,4!} = \underline{\mathbf{35}\ \text{（通り）}}$$

別解 白石 3 個を右図のように並べ，その両端とすき間の a，b，c，d に入れる黒石の数を考えると



$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ a \geqq 2,\ b \geqq 2,\ c \geqq 2,\ d \geqq 2 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数が求める総数であり，これは $A=a-2$，$B=b-2$，$C=c-2$，$D=d-2$ とおくと

$$\begin{cases} A+B+C+D=4 \\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(A,\ B,\ C,\ D)$ の個数に一致する。したがって

$${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35\ \text{（通り）}$$

260 題意より，1 と 2 が隣り合っていればよく，1，1，2，2 の並べ方を考えると

1212，1221，2112，2121

の 4 通りである。このおのおのに対して，前の 2 個，後の 2 個を $\boxed{\ \vdots\ }$，$\boxed{\ \vdots\ }$ として

$\boxed{\ \vdots\ }$，$\boxed{\ \vdots\ }$，3，4，5

の 5 個を並べ，$\boxed{\ \vdots\ }$ に前の 2 個，後の 2 個の順に当てはめればよいから

$$4 \times \frac{5!}{2!} = \underline{\mathbf{240}\ \text{（通り）}}$$

2.10　最短経路

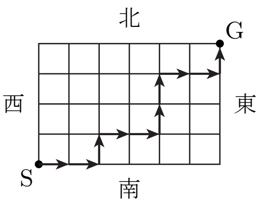
問題

261 下図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の 1 例である。）

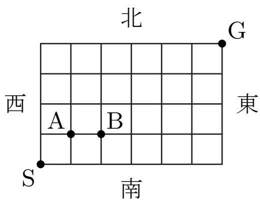
(1) S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2) S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

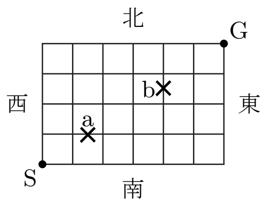
(3) 図 3 の a の部分と b の部分がともに通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図 1）



（図 2）

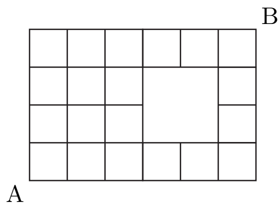


（図 3）

（北海道大）

262 図のような街路の町で，地点 A から地点 B へ行く最短の道すじは何通りあるか。

（東京女子医大）



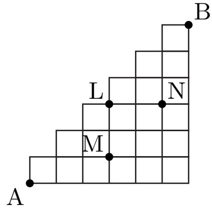
263 右の図において，次の問いに答えよ。

(1) 点 A から点 L に行く最短経路は $\boxed{}$ 通りある。

(2) 点 M と点 N を通って，点 A から点 B に行く最短経路は $\boxed{}$ 通りある。

(3) 点 A から点 B に行く最短経路は $\boxed{}$ 通りある。

（日本大）



チェック・チェック

261 縦，横の移動を↑，→で表すと，図 1 は

→ → ↑ → → ↑↑ → → ↑

となります。経路のとり方は→ 6 個，↑ 4 個の並べ方と一致しますから，(1) は**同じものを含む順列**と考えることができます。10 個の中から縦の移動の場所を決めると考えると，**組合せ** ${}_{10}C_4$ を計算してもよいですね。

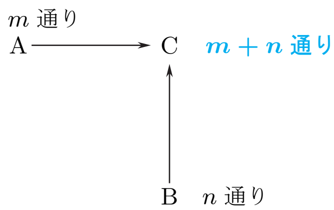
262 通行止めがある場合は，“**埋め立て**”工事をして，経路全体から，埋め立てた地点を通る経路を除けばよいでしょう。

263 通行止めあるいは欠落道路が多い場合は“**関所**”を設けて経路を場合分けしていきましょう。

これでも大変なときは，直接数え上げた方がはやいこともあります。すなわち，右図で地点 C に行くためには，A または B のいずれかから行くことになり，これらは同時には起こらないから，A までの行き方が m 通り，B までの行き方が n 通りならば，**和の法則**により

C に行く行き方は $\boldsymbol{m+n}$ **通り**

となります。



解答・解説

261 (1) 東へ 6 区画，北へ 4 区画移動するから，10 回の移動のうちどこで北 4 回の移動をするかを決めればよい。

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{210}\ \textbf{（通り）}}$$

(2) S から A に行く行き方は

$${}_2C_1 = 2 \text{ 通り}$$

A から B に行く行き方は

1 通り

B から G に行く行き方は

$${}_7C_3 = 35 \text{（通り）}$$

よって

$$2 \times 1 \times 35 = \underline{\mathbf{70}\ \textbf{（通り）}}$$

(3) (2) と同じように考えて，b を通る経路は

$${}_6C_2 \times 1 \times {}_3C_1 = 45 \text{（通り）}$$

a も b も通る経路は

$${}_2C_1 \times 1 \times {}_3C_1 \times 1 \times {}_3C_1 = 2 \times 1 \times 3 \times 1 \times 3 = 18 \text{（通り）}$$

よって，通行止めの 2 か所を通らずに進む経路は

$$210 - (70 + 45 - 18) = \underline{\mathbf{113}\ \textbf{（通り）}}$$

262 A から B への道が碁盤目にすべてつながっていたとすると

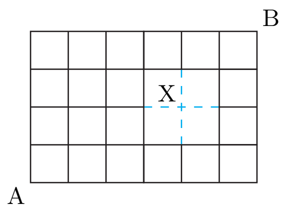
$${}_{10}C_4 = 210 \text{（通り）}$$

空白の地点を X とすると，この地点を通る道すじは

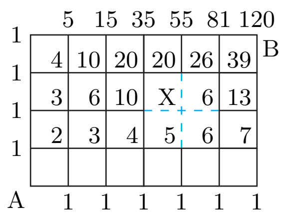
$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 15 \times 6 = 90 \text{（通り）}$$

よって，求める道すじは

$$210 - 90 = \underline{\mathbf{120}\ \textbf{（通り）}}$$



別解 **和の法則**を用いて数え上げると右図のようになる。



263 (1) 右図のように a，b，c をとると，A から L に行く最短経路のうち

a を通るのは

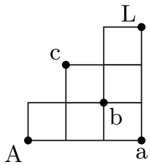
　　1 通り

b を通るのは

　　${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$（通り）

c を通るのは

　　$2 \times 2 = 4$（通り）



よって，最短経路の数は

　　$1 + 9 + 4 =$ **14（通り）**

(2) A から M に行く最短経路は

　　${}_4C_1 = 4$（通り）

M から N に行く最短経路は

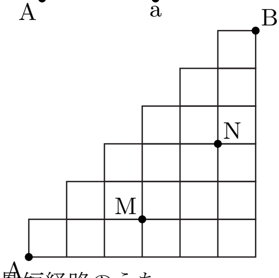
　　${}_4C_2 = 6$（通り）

N から B に行く最短経路は

　　${}_4C_1 = 4$（通り）

よって，最短経路の数は

　　$4 \times 6 \times 4 =$ **96（通り）**



(3) 右図のように o，p，q をとると，A から B に行く最短経路のうち

o を通るのは

　　1 通り

p を通るのは

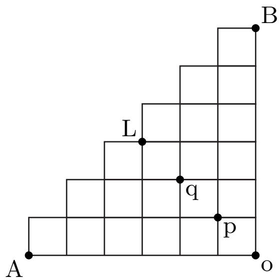
　　${}_6C_1 \times {}_6C_1 = 6 \times 6 = 36$（通り）

q を通るのは

　　$({}_6C_2 - 1)({}_6C_2 - 1) = 14 \times 14 = 196$（通り）

L を通るのは (1) より

　　$14 \times 14 = 196$（通り）



したがって，最短経路の総数は

　　$1 + 36 + 196 + 196 =$ **429（通り）**

別解 (1) 和の法則を使って，最短経路のとり方を数えていくと，右図から 14 通り。

(3) も同じように数え上げることができる。