1　確率とその基本性質

1.1　同様に確からしい

問題

264 3 つのサイコロを同時に振ったときの根元事象の数は $\boxed{}$ である。3 つの目の数の和が 13 になる確率は $\boxed{}$ である。　（明治薬科大　改）

265 A，B，C と書かれたカードがそれぞれ 1 枚，2 枚，4 枚ある。合計 7 枚のこれらのカードから 1 枚ずつカードを引き，左から順に並べて 7 文字の列を作る。どのカードを引く確率も等しいとするとき

(1) C が 4 個続いて並ぶ文字列ができる確率を求めよ。

(2) C が 3 個以上続いて並ぶ文字列ができる確率を求めよ。

（東京都立大　改）

チェック・チェック

確率の定義を確認しておきましょう。ある試行において，起こり得るすべての結果が N 通りあり，そのおのおのが**同様に確からしい**とき，事象 A が起こる場合の数が a 通りならば

$$\text{事象 } A \text{ の確率 } P(A)=\frac{a}{N}=\frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

でしたね。

「同様に確からしい」とは N 通りのおのおのが同程度に起こるということです。

264 **根元事象**とは，もうこれ以上分解できない事象のことです。3 つのさいころを振るとき,「1 の目が 3 つ出る」は根元事象ですが,「1，2，3 の目が出る」は根元事象ではありません。3 つのさいころを A，B，C と区別し，出た目をそれぞれ a，b，c とするとき,「1，2，3 の目が出る」という事象 X は

$$\begin{aligned}X=\{(a,\ b,\ c)\,|\,&(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\\&(2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\\&(3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)\}\end{aligned}$$

と 6 個の根元事象に分解されます。

265 「どのカードを引く確率も等しい」ということは「7 枚のカードが等確率で順次引かれていく」，すなわち「7 枚のカードはすべて区別する」ということです。

7 枚のカードを A，B_1，B_2，C_1，C_2，C_3，C_4 と区別したときの並べ方は $7!$ 通りあり，これらは等確率で起こります。

一方，同じ文字のカードを区別しないときの並べ方は $\dfrac{7!}{2!4!}$ 通りであり，これらも等確率で起こります。すなわち，同じ文字のカードを区別しないで確率を求めることも可能です。大切なことは何を根元事象にとるかということです。

解答・解説

264 3 つのさいころを同時に振ったときの根元事象の数は

$$6 \times 6 \times 6 = \underline{\mathbf{216}}$$

和が 13 となるのは

$$\{6,\ 6,\ 1\},\ \{6,\ 5,\ 2\},\ \{6,\ 4,\ 3\},\ \{5,\ 5,\ 3\},\ \{5,\ 4,\ 4\}$$

並べ替えも考えると

$\{6,\ 5,\ 2\},\ \{6,\ 4,\ 3\}$ ⋯ それぞれ $3!$ 通り
$\{6,\ 6,\ 1\},\ \{5,\ 5,\ 3\},\ \{5,\ 4,\ 4\}$ ⋯ それぞれ 3 通り

よって，3 つの目の数の和が 13 になる場合の数は

$$2 \times 3! + 3 \times 3 = 21 \text{（通り）}$$

だから，求める確率は

$$\frac{21}{216} = \underline{\mathbf{\frac{7}{72}}}$$

265 A，B_1，B_2，C_1，C_2，C_3，C_4 として，**7 枚のカードをすべて区別**したときの並べ方は $7!$ 通りであり，これらは同様に確からしい。

(1) C_1，C_2，C_3，C_4 を 1 組として D で表すと，D の並べ方は $4!$ 通りあり，A，B_1，B_2，D の並べ方は $4!$ 通りなので，求める確率は

$$\frac{4! \times 4!}{7!} = \underline{\mathbf{\frac{4}{35}}}$$

(2) C_1，C_2，C_3，C_4 から 3 個を選んで並べたものを E，残りを C とすると，E のつくり方は ${}_4P_3$ 通り。A，B_1，B_2 を並べ，両端または間に E と C を 1 つずつ並べる方法は，$3! \times {}_4P_2$ 通りなので，求める確率は

$$\frac{{}_4P_3 \times 3! \times {}_4P_2}{7!} + \frac{4}{35} = \underline{\mathbf{\frac{16}{35}}}$$

別解 同じ文字のカードを区別しないときの並べ方は

$$\frac{7!}{2!4!} = 105 \text{（通り）}$$

であり，これらは同様に確からしい。

(1) **C を 4 個並べたものを 1 組として D で表す**。A，B，B，D の順列を考えると，C が 4 個続いて並ぶ文字列は $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りできるので，求める確率は

$$\frac{12}{105} = \frac{4}{35}$$

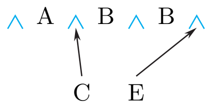
(2) **C を 3 個並べたものを 1 組として E で表す**。C が 3 個だけ続いて並ぶ並び方は，まず A，B，B を並べて

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{（通り）}$$

次に両端またはすき間の 4ヵ所に C と E を 1 つずつ並べて

$${}_4\mathrm{P}_2 = 12 \text{（通り）}$$

したがって，$3 \times 12 = 36$ 通りできる。



(1) と合わせて，C が 3 個以上続く確率は

$$\frac{12+36}{105} = \frac{16}{35}$$

1.2 余事象の確率

問題

266 袋の中に赤玉 7 個と白玉 4 個が入っている。この袋から同時に 3 個取り出すとき，取り出した 3 個の玉のうち少なくとも 1 個が白玉である確率は $\boxed{}$ である。 （関西学院大 改）

267 次の問いに答えよ。

(1) A，B，C の 3 つの箱に a，b，c の 3 個のボールを入れる。

(a) 入れ方の総数は何通りあるか。

(b) 1 つの箱に 2 つ以上ボールが入っている事象の確率を求めよ。

(c) A の箱が空でない事象の確率を求めよ。

(2) A，B，C の 3 つの箱に区別できない 3 個のボールを入れる。

(a) 入れ方の総数は何通りあるか。

(b) 1 つの箱に 2 つ以上ボールが入っている事象の確率を求めよ。

（福岡工業大）

チェック・チェック

266 3 個の玉の取り出し方が同様に確からしいのは **11 個の玉をすべて区別**したときです。また,「**少なくとも…**」ときたら余事象を考えてみましょう。

267 ボールを区別するかしないかで (1)，(2) と設問が分かれています。ともに (a) で求めた場合の数が同程度に起こります（**同様に確からしい**）。

解答・解説

266 異なる 11 個の玉から 3 個を取り出す取り出し方は

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165 \text{（通り）}$$

であり，これらは同様に確からしい。

取り出した 3 個の玉のうち少なくとも 1 個が白玉である確率は

$$1 - (3\text{ 個とも赤玉である確率}) = 1 - \frac{{}_7C_3}{165} = \underline{\mathbf{\frac{26}{33}}}$$

267 (1) (a) 1 つのボールについて，3 通りの箱への入れ方があるから，求める総数は

$$3^3 = \underline{\mathbf{27}\text{（通り）}}$$

であり，これらは同様に確からしい。

(b) 求める確率は

$$1 - (\text{各箱に 1 つずつボールが入っている確率}) = 1 - \frac{3!}{27} = \underline{\mathbf{\frac{7}{9}}}$$

(c) 求める確率は

$$\begin{aligned} &1 - (\text{A の箱が空である確率}) \\ &= 1 - (\text{B または C の箱に 3 個のボールが入っている確率}) \\ &= 1 - \frac{2^3}{27} = \underline{\mathbf{\frac{19}{27}}} \end{aligned}$$

(2) (a) 3 つのボールを 2 つの仕切りで区切ると考えると，求める総数は

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \underline{\mathbf{10}\text{（通り）}}$$

であり，これらは同様に確からしい。

(b) 求める確率は

$$1 - (\text{各箱に 1 つずつボールが入っている確率}) = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\mathbf{\frac{9}{10}}}$$

1.3　和事象の確率

問題

268 事象 A と事象 B が互いに排反で，$P(A)=\dfrac{1}{5}$，$P(A\cup B)=\dfrac{4}{5}$ を満たすとき，$P(B)=\boxed{}$ であり，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\boxed{}$ である。ただし，$\overline{X}$ は事象 X の余事象を表すとする。（京都薬科大）

269 1 から 200 までの番号のついたカード 200 枚から任意に 1 枚取り出すとき

(1) 取り出したカードの番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2) また取り出したカードの番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。（明星大）

270 客 100 人に料理 A, B, C が出され，料理を食べなかった客はいなかった。A を 25 人が，B を 49 人が，C を 58 人が食べた。また，5 人が全種類食べ，56 人が A か B の少なくともどちらか 1 つを食べた。客の中から任意に選んだ 1 人が A, B の両方とも食べた確率は $\boxed{}$ であり，ちょうど 2 種類の料理を食べた確率は $\boxed{}$ である。（同志社大）

チェック・チェック

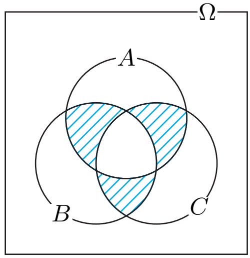
268 2 つの事象 A，B が同時に起こることはない。すなわち，$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$ のとき，2 つの事象 A，B は互いに**排反**であるといいます。

269 $A = \{3 \text{ の倍数}\}$，$B = \{5 \text{ の倍数}\}$ とおくと，(1)，(2) は

(1) $\boldsymbol{P(A \cup B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ （加法定理）

(2) $\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B})} = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

270 3 つの事象の確率です。



$$\boldsymbol{P(A \cup B \cup C)}$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

また

$$P(A \cap B \cap \overline{C})$$
$$= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$$

ですから

$$\boldsymbol{P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C)}$$
$$= P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 3P(A \cap B \cap C)$$

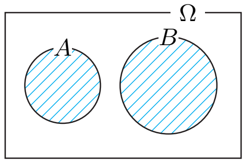
解答・解説

268 事象 A と事象 B が互いに排反なので

$$A \cap B = \emptyset$$

したがって，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ より

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{5}}}$$

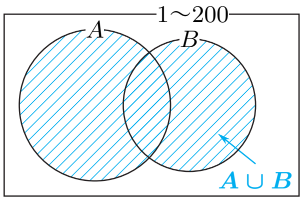


また

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{5}}}$$

269 (1) 3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると

$$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots,\ 198\}$$
$$B = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots,\ 200\}$$



であり

$$n(A) = 66,\quad n(B) = 40$$

である。また

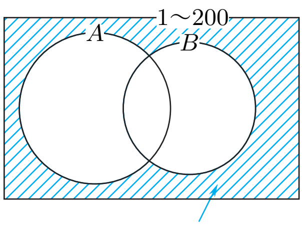
$$200 = 15 \times 13 + 5$$

より $n(A \cap B) = 13$ なので，求める確率は

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$
$$= \frac{66}{200} + \frac{40}{200} - \frac{13}{200}$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{93}{200}}}$$

(2) 「3 の倍数でも 5 の倍数でもない」の**余事象**は「3 の倍数または 5 の倍数」なので，(1) より

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \frac{93}{200}$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{107}{200}}}$$



270 $n(A \cup B \cup C) = 100,\quad n(A) = 25,\quad n(B) = 49,\quad n(C) = 58,$
$n(A \cap B \cap C) = 5,\quad n(A \cup B) = 56$

である。

A，B の両方とも食べた人数は

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 25 + 49 - 56 \\ &= 18 \end{aligned}$$

よって，その確率は

$$P(A \cap B) = \frac{18}{100} = \underline{\boldsymbol{\frac{9}{50}}}$$

である。

また

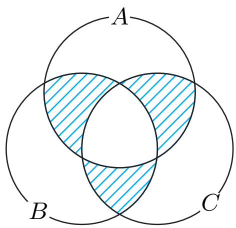
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

なので，ちょうど 2 種類の料理を食べた人数は

$$\begin{aligned} &n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) \\ &\qquad - n(A \cup B \cup C) - 3n(A \cap B \cap C) \\ &= 25 + 49 + 58 - 100 - 2 \times 5 = 22 \end{aligned}$$



よって，その確率は

$$\frac{22}{100} = \underline{\boldsymbol{\frac{11}{50}}}$$

である。

1.4 さいころの確率

問題

271 (1) 2 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目の和が 8 以上になる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 3 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目の和が 5 以上になる確率は $\boxed{}$ である。 （昭和薬科大）

272 さいころを 2 つ投げて，出た目の数の和を得点とする。A，B 2 人が 1 回ずつこれを行い，得点の多い方を勝ちとし，得点が同じならば引き分けとする。

(1) 引き分けの確率を求めよ。

(2) A が勝つ確率を求めよ。 （学習院大）

273 大，中，小 3 つのサイコロを同時に投げて，出た目をそれぞれ x，y，z とする。

(1) x，y，z が直角三角形の 3 辺の長さになる確率は $\boxed{}$ である。

(2) x，y，z が二等辺三角形（正三角形を含む）の 3 辺の長さになる確率は $\boxed{}$ である。 （立命館大）

274 4 個のサイコロを振るとき，

(1) 出る目の積が奇数になる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 出る目の和が 3 の倍数となる確率は $\boxed{}$ である。

(3) 出る目の最大値が 5 である確率は $\boxed{}$ である。 （西南学院大）

チェック・チェック

271 (1) 2 個のさいころの目の出方なら**表にして 36 通りを書いてしまう**方が早いでしょう。
(2) 余事象を考えましょう。

272 (1) さいころ 2 つですから **36 通りすべてを記した表**を書きましょう。
(2) A と B は対等なので，それぞれが勝つ確率は等しくなります。

273 (1) 1 以上 6 以下の整数で直角三角形の 3 辺となるのは $\{3,\ 4,\ 5\}$ の組合せだけです。
(2) 長さ x，y，z の 3 本の線分が三角形をつくるための条件は

$$|x-y|<z<x+y$$

です。これを $x=y$ として二等辺三角形をつくるための条件に直すと

$$(0<)z<2x$$

となります。ダブリを避けるために，**正三角形は分けて**数え上げるとよいでしょう。

274 (1) 「出る目の積が奇数になる」ということは，すべての目が奇数であるということです。
(2) 「出る目の和が 3 の倍数となる」ものを，3 でわった余り 1，2，0 で表すと

$$1+2+0+0,\quad 1+1+2+2,\quad 1+1+1+0,$$
$$2+2+2+0,\quad 0+0+0+0$$

の 5 通りがあります。
(3) 「出る目の最大値が 5 である」ということは,「すべての目が 5 以下であり，かつ，少なくとも 1 つは 5 の目が出る」ということです。つまり，出る目の最大値を X とおくと，求める確率は

$$P(X=5)=P(X\leqq 5)-P(X\leqq 4)$$

です。

解答・解説

271 (1) 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和を表にすると右のようになり，和が 8 以上となるのは 15 通りある。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	**9**
4	5	6	7	**8**	**9**	**10**
5	6	7	**8**	**9**	**10**	**11**
6	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

2 個のさいころの目の出方は $6^2=36$ 通りあるので

$$\frac{15}{36}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{12}}}$$

(2) 余事象を考える。3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が 4 以下となるのは (1，1，1)，(1，1，2)，(1，2，1)，(2，1，1) の 4 通り。

さいころの目の出方は $6^3=216$ 通りあるので，求める確率は

$$1-\frac{4}{216}=1-\frac{1}{54}=\underline{\boldsymbol{\frac{53}{54}}}$$

272 2 つのさいころの目の和は **271** の表より，次のようになる。

目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

(1) 引き分けになるのは，A，B ともに同じ和になるときなので，求める確率は

$$2\left\{\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{2}{36}\right)^2+\left(\frac{3}{36}\right)^2+\left(\frac{4}{36}\right)^2+\left(\frac{5}{36}\right)^2\right\}+\left(\frac{6}{36}\right)^2$$

$$=\frac{2}{36^2}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)+\frac{6^2}{36^2}$$

$$=\frac{2}{36^2}\times 55+\frac{6^2}{36^2}=\frac{146}{36^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{73}{648}}}$$

(2) A，B が勝つ確率をそれぞれ a，b とおくと

$$\begin{cases} a+b+\dfrac{73}{648}=1 \\ a=b \end{cases} \qquad \therefore\quad a=\underline{\boldsymbol{\frac{575}{1296}}}$$

273 3 個のサイコロの目の出方は $6^3 = 216$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

(1) 直角三角形になるのは，3 辺が 3，4，5 のときであり

$$(x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 5),\ (3,\ 5,\ 4),\ (4,\ 3,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3),\ (5,\ 3,\ 4),\ (5,\ 4,\ 3)$$

の 6 通りである。したがって，求める確率は

$$\frac{6}{216} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{36}}}$$

(2) x，y，z が $x = y$ をみたす二等辺三角形（正三角形ではない）の 3 辺の長さになる，すなわち，$x = y$，$x \neq z$，$z < 2x$ をみたす $(x,\ y,\ z)$ は

$(2,\ 2,\ 1),\ (2,\ 2,\ 3),$
$(3,\ 3,\ 1),\ (3,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 4),\ (3,\ 3,\ 5),$
$(4,\ 4,\ 1),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 4,\ 3),\ (4,\ 4,\ 5),\ (4,\ 4,\ 6),$
$(5,\ 5,\ 1),\ (5,\ 5,\ 2),\ (5,\ 5,\ 3),\ (5,\ 5,\ 4),\ (5,\ 5,\ 6),$
$(6,\ 6,\ 1),\ (6,\ 6,\ 2),\ (6,\ 6,\ 3),\ (6,\ 6,\ 4),\ (6,\ 6,\ 5)$

の 21 通りであり，$y = z$，$z = x$ のときも考えると 21×3 通りある。また，3 数 x，y，z が同じ場合，すなわち正三角形となるのは

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4),\ (5,\ 5,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$$

の 6 通りある。よって，求める確率は

$$\frac{21 \times 3 + 6}{216} = \frac{69}{216} = \underline{\boldsymbol{\frac{23}{72}}}$$

274 4 個のサイコロの目の出方は 6^4 通りであり，これらは同様に確からしい。

(1) 出る目の積が奇数となるのは，4 個のサイコロのすべての目が奇数となるときだから，そのような目の出方は 3^4 通りである。よって，求める確率は

$$\frac{3^4}{6^4} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{16}}}$$

(2) サイコロの目について「1 または 4 を A」,「2 または 5 を B」,「3 または 6 を C」と表すことにする。4 個のサイコロの目の和が 3 の倍数となるのは

(i) A が 1 個，B が 1 個，C が 2 個出る場合で，その目の出方が

$$2^4 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 192 \text{（通り）}$$

(ii) A が 2 個，B が 2 個出る場合で，その目の出方が

$$2^4 \times {}_4C_2 = 96 \text{（通り）}$$

(iii) A が 3 個，C が 1 個出る場合で，その目の出方が

$$2^4 \times 4 = 64 \text{（通り）}$$

(iv) B が 3 個，C が 1 個出る場合で，その目の出方が

$$2^4 \times 4 = 64 \text{（通り）}$$

(v) C が 4 個出る場合で，その目の出方が

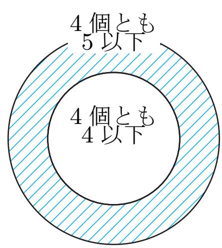
$$2^4 = 16 \text{（通り）}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{192 + 96 + 64 + 64 + 16}{6^4} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

(3) 出た目の最大値が 5 である確率は

$$\frac{5^4}{6^4} - \frac{4^4}{6^4} = \underline{\boldsymbol{\frac{41}{144}}}$$



1.5　赤玉，白玉の確率

問題

275 袋の中に赤玉 6 個，白玉 4 個が入っている。この中から同時に 3 個を取り出すとき，赤玉，白玉がともに取り出される確率は $\boxed{}$ である。

（千葉工業大）

276 箱の中に 32 個の球が入っている。球は 8 個ずつ赤色，青色，黄色，緑色になっていて，各々の色の球には 1 から 8 までの番号が重複なく書かれているものとする。箱の中から 4 個の球を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 番号に関係なく，4 個の球が同じ色になる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 4 個の球の番号が続き番号になり，かつすべて同じ色になる確率は $\boxed{}$ である。

(3) 色に関係なく，4 個の球の番号がすべて異なる確率は $\boxed{}$ である。

（星薬科大）

277 赤玉と白玉が合わせて 16 個入っている袋がある。この袋から 1 個玉をとり出し，残りからまた 1 個玉をとり出す。このとき，とり出した 2 玉が同じ色となる確率が $\dfrac{1}{2}$ ならば，白玉の個数は $\boxed{}$ 個か $\boxed{}$ 個である。

（徳島文理大）

278 2 つの袋 A，B がある。A には赤玉 4 個と白玉 5 個，B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている。A から 2 個，B から 3 個の玉をとり出す。A からとり出される 2 個のうちの赤玉の個数を X，B からとり出される 3 個のうちの赤玉の個数を Y とするとき，次の事象の確率を求めよ。

(1) $X+Y=2$

(2) $X+Y>2$

(3) $X<Y$

（兵庫医科大）

チェック・チェック

275 赤玉，白玉の取り出し方をすべてかくと

(赤，白) $=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$

ですから，条件をみたす確率を直接計算しても余事象を計算しても，場合分けの数は同じです。計算のラクな方をとりましょう。

276 (1) 同じ色の 4 個の球を取り出すには，まず色を決めて，次にその色の 8 個の球の中から 4 個の球を取り出せばよいですね。

(2) 同じ色の連番となる 4 個の球を取り出すには，まず色を決めます。次に連番となるのは

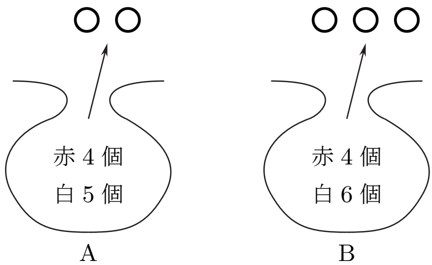
$(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5,\ 6),\ (4,\ 5,\ 6,\ 7),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8)$

のいずれかです。

(3) 色に関係なく，異なる 4 個の番号の球を取り出すには，まず取り出す番号を決めます。どの番号についても，球は 4 個ずつあります。

277 白玉の個数を n 個とすると，赤玉の個数は $16-n$ 個です。

278 題意を把握するためには図をかきながら問題を読むとよいでしょう。



(2) (1) の利用を考えると余事象を計算する方がラクですね。

解答・解説

275 赤玉，白玉合わせて 10 個から 3 個取り出す取り出し方は ${}_{10}C_3$ 通りである。取り出した 3 個がすべて赤玉であるのは ${}_6C_3$ 通りであり，取り出した 3 個がすべて白玉であるのは ${}_4C_3$ 通りである。求める確率はすべてが同じ色である場合の余事象となるので

$$1-\frac{{}_6C_3+{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=1-\frac{20+4}{120}=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{5}}}$$

別解 (赤，白) = (1，2)，(2，1) のときを考え

$$\frac{{}_6C_1\times{}_4C_2+{}_6C_2\times{}_4C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{36+60}{120}=\frac{4}{5}$$

276 異なる 32 個の球から 4 個を取り出す取り出し方は ${}_{32}C_4$ 通りである。

(1) どの色を取り出すかが 4 通りあり，どの番号を取り出すかが ${}_8C_4$ 通りあるから

$$\frac{4\times{}_8C_4}{{}_{32}C_4}=\frac{4\times8\cdot7\cdot6\cdot5}{32\cdot31\cdot30\cdot29}=\underline{\boldsymbol{\frac{7}{899}}}$$

(2) どの色を取り出すかが 4 通りあり，どの連続した番号を取り出すかが 5 通りあるから

$$\frac{4\times5}{{}_{32}C_4}=\frac{4\times5\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{32\cdot31\cdot30\cdot29}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{1798}}}$$

(3) 異なる番号の選び方が ${}_8C_4$ 通りあり，そのおのおのに対して色の選び方が 4 通りずつあるから

$$\frac{{}_8C_4\times4^4}{{}_{32}C_4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\times4^4}{32\cdot31\cdot30\cdot29}=\underline{\boldsymbol{\frac{448}{899}}}$$

277 白玉の個数を n とすると，赤玉は $16-n$ 個である。このとき

2 個とも白玉である確率は　$\dfrac{n}{16}\times\dfrac{n-1}{15}$

2 個とも赤玉である確率は　$\dfrac{16-n}{16}\times\dfrac{15-n}{15}$

なので

$$\frac{n(n-1)}{16\times15}+\frac{(16-n)(15-n)}{16\times15}=\frac{1}{2}$$

$$n(n-1)+(16-n)(15-n)=120$$

$$n^2-16n+60=0 \qquad (n-6)(n-10)=0 \qquad \therefore\quad n=6,\ 10$$

よって，白玉の個数は **6 個** か **10 個** である。

別解 同時に 2 個取り出すとして $\dfrac{{}_nC_2}{{}_{16}C_2}+\dfrac{{}_{16-n}C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{1}{2}$ としてもよい。

278 (1) $X+Y=2$ となるのは，$(X,\ Y)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$ のときで，それぞれの確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{18}$$

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{36}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{12}+\frac{5}{18}+\frac{1}{36}=\underline{\boldsymbol{\frac{7}{18}}}$$

(2) $X+Y>2$ となるのは $X+Y=2,\ 1,\ 0$ の余事象である。

$$(X,\ Y)=(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 0)$$

となる確率は，それぞれ

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{36}$$

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{54}$$

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{108}$$

よって，$X+Y<2$ となる確率は

$$\frac{5}{36}+\frac{5}{54}+\frac{5}{108}=\frac{5}{18}$$

したがって，求める確率は (1) と合わせて

$$1-\frac{7}{18}-\frac{5}{18}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

(3) $X<Y$ となるのは，その余事象 $X\geqq Y$ を考えて

$$(X,\ Y)=(2,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 0)$$

(1)，(2) と同様に考えて $(X,\ Y)=(2,\ 2),\ (2,\ 1)$ となる確率を求めると

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$$

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$$

よって，$X\geqq Y$ となる確率は

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{5}{18}+\frac{5}{54}+\frac{5}{108}=\frac{26}{45}$$

したがって，求める確率は

$$1-\frac{26}{45}=\underline{\boldsymbol{\frac{19}{45}}}$$

1.6　カードの確率

問題

279 9 枚のカードがあり，その各々には I，I，D，A，I，G，A，K，U という文字が 1 つずつ書かれている。

(1) これら 9 枚のカードをよく混ぜて横一列に並べる。D，G，K，U のカードだけを見たとき，左から右へこの順序で並んでいる確率は $\boxed{}$ である。また，I のカードが 3 枚続いて並ぶ確率は $\boxed{}$ である。

(2) これら 9 枚のカードをよく混ぜて 3 枚を同時に取り出したとき，3 枚のカードに書かれた文字が K，A，I である確率は $\boxed{}$ である。3 枚のカードの中に I と書かれたカードが少なくとも 1 枚ある確率は $\boxed{}$ である。3 枚のカードに書かれた文字がすべて異なる確率は $\boxed{}$ である。

（関西大）

280 0 から 9 までの数字がひとつずつ書かれたカードが 10 枚ある。カードをよくきって，その中から 2 枚のカードを同時に引くとき，2 枚のカードの数字の差が 3 以上になる確率は $\boxed{}$ である。　（金沢医科大）

281 1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから同時に 2 枚を取り出す。このとき，その番号の和が 2 の倍数である確率は $\boxed{}$ であり，3 の倍数である確率は $\boxed{}$ である。また，その番号の和が 2 または 3 の倍数である確率は $\boxed{}$ である。　（金沢工業大）

チェック・チェック

279　“いい大学”とはユーモアのある大学ですね。

(1)　D，G，K，U をこの順に並べるには，とりあえず，空箱 4 個 □□□□ として並べておいて，後で順に D，G，K，U と入れていけばよいですね。

(2)　最後の設問に対しては，コツコツ場合分けして計算しましょう。

280　場合分けの数を数えると**余事象**の確率を計算する方がラクですね。

281　2 つの番号の和が 2 の倍数である事象を A，3 の倍数である事象を B とすると，最後の設問は $P(A\cup B)$ を求めよという問いですから

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

を用います。

解答・解説

279 (1) I，I，I，A，A，D，G，K，U の 9 枚のカードの並び方の総数 N は

$$N=\frac{9!}{3!\,2!}\text{（通り）}$$

4 枚のカード D，G，K，U がこの順に並ぶ並び方の総数 N_1 は

□，□，□，□，I，I，I，A，A

を並べた後で，4 つの空箱□に左から順に D，G，K，U を入れればよいから

$$N_1=\frac{9!}{4!\,3!\,2!}\text{（通り）}$$

よって，求める確率は

$$\frac{N_1}{N}=\frac{1}{4!}=\underline{\mathbf{\frac{1}{24}}}$$

また，I のカードが 3 枚続いて並ぶ並び方の総数 N_2 は **I，I，I をひとまとまり**とみて

$$N_2=\frac{7!}{2!}\text{（通り）}$$

よって，求める確率は

$$\frac{N_2}{N}=\frac{7!}{2!}\cdot\frac{3!\,2!}{9!}=\underline{\mathbf{\frac{1}{12}}}$$

(2) 3 枚のカードに書かれた文字が K，A，I である確率は

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_9C_3}=\underline{\mathbf{\frac{1}{14}}}$$

I と書かれたカードが少なくとも 1 枚ある確率は

$$1-\frac{{}_6C_3}{{}_9C_3}=\underline{\mathbf{\frac{16}{21}}}$$

次に，3 枚のカードに書かれた文字がすべて異なる確率を求める。**A と I の使われ方で場合分け**すると，3 枚のカードが (D，A，I)，(G，A，I)，(K，A，I)，(U，A，I) となる確率はそれぞれ

$$\frac{1}{14}$$

D，G，K，U のうちの 2 枚と A となる確率は

$$\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_1}{{}_9C_3}=\frac{1}{7}$$

D，G，K，U のうちの 2 枚と I となる確率は

$$\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_9C_3}=\frac{3}{14}$$

D，G，K，U のうちの 3 枚となる確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{1}{14}\times4+\frac{1}{7}+\frac{3}{14}+\frac{1}{21}=\underline{\mathbf{\frac{29}{42}}}$$

280 2 枚のカードの取り出し方は

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{（通り）}$$

2 枚のカードの差が 1 となるようなカードの取り出し方は

$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$，$\cdots$，$(9,\ 8)$ の 9 通り

また，2 枚のカードの差が 2 となるようなカードの取り出し方は

$(2,\ 0)$，$(3,\ 1)$，$\cdots$，$(9,\ 7)$ の 8 通り

よって，求める確率は

$$1 - (2 \text{ 枚のカードの差が } 2 \text{ 以下となる確率}) = 1 - \frac{9+8}{45} = \underline{\boldsymbol{\frac{28}{45}}}$$

281 2 枚のカードの取り出し方は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{（通り）}$$

番号の和が 2 の倍数となるのは

2 枚とも奇数　または　2 枚とも偶数

となるときだから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2 + {}_5C_2}{45} = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{9}}}$$

番号の和が 3 の倍数となるのは

「1，4，7，10」と「2，5，8」から 1 枚ずつ

または　「3，6，9」から 2 枚

となるときだから，求める確率は

$$\frac{4 \times 3 + {}_3C_2}{45} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

番号の和が 6 の倍数となるのは，取り出した 2 つの番号が

$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(2,\ 10)$，$(3,\ 9)$，$(4,\ 8)$，$(5,\ 7)$，$(8,\ 10)$

となるときだから，この確率は

$$\frac{7}{45}$$

よって，求める確率は

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{3} - \frac{7}{45} = \underline{\boldsymbol{\frac{28}{45}}}$$

2　独立試行・反復試行

2.1　硬貨投げ

問題

282 1 枚の硬貨を 5 回投げて，表が 3 回出る確率は $\boxed{}$ である。

（九州共立大）

283 表と裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるコインを $3n$ 回投げて，表が出る回数が n 回以上 $2n$ 回以下である確率を P_n とおく。このとき，$P_1 = \boxed{}$，$P_3 = \boxed{}$ である。

（明治学院大）

284 金貨と銀貨が 1 枚ずつある。これらを同時に 1 回投げる試行を行ったとき，金貨が裏ならば 0 点，金貨が表で銀貨が裏ならば 1 点，金貨が表で銀貨も表ならば 2 点が与えられるものとする。この試行を 5 回繰り返した後に得られる点数を X とする。

(1) $X = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $X = 3$ となる確率を求めよ。

(3) X が偶数となる確率を求めよ。ただし，0 は偶数とする。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

1 枚の硬貨を投げるという試行と 1 個のさいころを投げるという試行を行うとき，硬貨の表裏の出方とさいころの目の出方は無関係であり，この 2 つの試行は互いにその結果に影響を与えません。このように 2 つの試行が他方の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立**であるといいます。2 つの独立な試行 S，T を行うとき，S で事象 A が起こり，T で事象 B が起こる確率は $\boldsymbol{P(A)P(B)}$ です。

硬貨投げを続けて行うときのように，同じ条件のもとで同じ試行を何回か繰り返して行うときは，各回の試行は独立です。このような試行を**反復試行**といいます。1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とすると，n 回の反復試行において事象 A がちょうど r 回起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ です。

282 5 回の反復試行の問題です。表を○，裏を×で表すと，表が 3 回出るときの表裏の出方は

○○○××，○○×○×，○×○○×，……，××○○○

といった○ 3 個，× 2 個の並べ方であり ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあります。また，どの並び方のときも，確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

です。

283 P_1 は，コインを $3\times 1=3$ 回投げて，表が出る回数が 1 以上 2×1 以下，すなわち 1 回または 2 回である確率です。

P_3 は，コインを $3\times 3=9$ 回投げて，表が出る回数が 3 以上 2×3 以下，すなわち 3 回，4 回，5 回，6 回である確率です。

284 金貨，銀貨を投げる試行は独立であり，1 回の試行で

0 点を得る確率は，金貨が裏（銀貨の表裏は無視）となる確率であり　$\dfrac{1}{2}$

1 点を得る確率は，金貨が表で銀貨が裏となる確率であり　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

2 点を得る確率は，金貨，銀貨がともに表となる確率であり　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

です。

(3)　X が偶数としてとり得る値は，$X=0$，2，4，6，8，10 の 6 通りです。(1)，(2) において，$X=1$，3 となる確率が求められているので余事象を考えましょう。

あるいは，1 回の試行での得点が 0，1，2 のいずれかなので，1 点が偶数回であれば 5 回の合計得点は偶数となることを利用してもよいでしょう。

解答・解説

282 5 回中表が 3 回となる場合の数は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りであるから，求める確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^5}=\underline{\frac{5}{16}} $$

283 P_1 はコインを 3 回投げて，**表が 1 回または 2 回出る**確率なので

$$ P_1={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\underline{\frac{3}{4}} $$

P_3 はコインを 9 回投げて，**表が 3 回以上 6 回以下出る**確率なので

$$ P_3={}_9\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_9\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 +{}_9\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_9\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^3 $$

${}_9\mathrm{C}_3={}_9\mathrm{C}_6$，${}_9\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_5$ より

$$ P_3=2({}_9\mathrm{C}_3+{}_9\mathrm{C}_4)\left(\frac{1}{2}\right)^9=\underline{\frac{105}{128}} $$

284 1 回の試行において

0 点を得る確率は $\frac{1}{2}$，1 点を得る確率は $\frac{1}{4}$，2 点を得る確率は $\frac{1}{4}$

(1) $X=1$ となるのは，5 回の試行において

1 点を 1 回，0 点を 4 回得る場合

であるから，その確率は

$$ \frac{5!}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\underline{\frac{5}{64}} $$

(2) $X=3$ となるのは，5 回の試行において

2 点を 1 回，1 点を 1 回，0 点を 3 回得る場合
1 点を 3 回，0 点を 2 回得る場合

のどちらかであり，これらは互いに排反であるから，その確率は

$$ \frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\frac{25}{128}} $$

(3) $X=5$ となるのは，5 回の試行において

2 点を 2 回，1 点を 1 回，0 点を 2 回得る場合
2 点を 1 回，1 点を 3 回，0 点を 1 回得る場合
1 点を 5 回得る場合

のいずれかであり，これらは互いに排反であるから，その確率は

$$\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{161}{1024}$$

$X=7$ となるのは，5 回の試行において

2 点を 3 回，1 点を 1 回，0 点を 1 回得る場合
2 点を 2 回，1 点を 3 回得る場合

のどちらかであり，これらは互いに排反であるから，その確率は

$$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{25}{512}$$

$X=9$ となるのは，5 回の試行において

2 点を 4 回，1 点を 1 回得る場合

であるから，その確率は

$$\frac{5!}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{5}{1024}$$

したがって，X が偶数となる確率は

$$1-\left(\frac{5}{64}+\frac{25}{128}+\frac{161}{1024}+\frac{25}{512}+\frac{5}{1024}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{33}{64}}}$$

別解 X が偶数となるのは，5 回の試行において

1 点を偶数回得る場合

であるから，1 点を 0 回，2 回，4 回得る場合のいずれかであり，これらは互いに排反である。

したがって，求める確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1$$
$$=\frac{243+270+15}{4^5}=\frac{33}{64}$$

2.2　さいころ投げ

問題

285 (1) 1 個のさいころを 4 回続けて投げるとき，3 回以上連続して同じ目が出る確率は $\boxed{}$ である。（立教大）

(2) サイコロを投げ続けるとき，3 回目にはじめて 1 の目が出る確率は $\boxed{}$ である。3 回目に 2 度目の 1 の目が出る確率は $\boxed{}$ である。（大阪電気通信大）

286 (1) 1 個のさいころを 5 回続けて投げるとき，1 の目が 2 回，2 の目が 2 回，6 の目が 1 回出る確率を求めよ。（東京電機大）

(2) 正しく作られたさいころ 1 個を 3 回振るとき，2 の目と 3 の目の両方が出る確率を求めなさい。（熊本県立大）

287 さいころを 7 回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

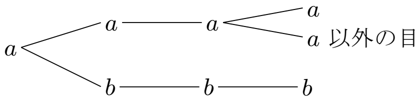
(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

（千葉大　改）

チェック・チェック

285 (1) 1 回目のさいころの目を a，a と異なるさいころの目を b とすると，さいころを 4 回続けて投げるとき，3 回以上連続して同じ目が出るのは



のいずれかです。

(2) 3 回目に 2 度目の 1 の目が出るということは，1 回目と 2 回目のうちどちらか 1 回だけが 1 の目，そして 3 回目も 1 の目ということです。

286 (1) 1，1，2，2，6 の目の並び方は $\dfrac{5!}{2!2!}$ 通りあります。

(2) 題意をみたすのは，さいころを 3 回振るとき，2 の目と 3 の目が 1 回ずつ出る他に，2 の目または 3 の目がさらにもう 1 回出るか，2，3 の目以外が出るかのいずれかです。

287 (1) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数であるということは，X_1，X_2，$\cdots$，X_7 の少なくとも 1 つが偶数ということです。余事象を考えましょう。

(2) これも余事象を考えましょう。

(3) X_k を **3 でわった余り** r_k は 0，1，2 のいずれかであり，積 X_iX_j を 3 でわった余りは，r_ir_j を 3 でわった余りに一致するから，X_iX_j を 3 でわった余りは右の表のようになります。したがって，積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 でわったときの余りが 1 であるのは，**$r_k=1$ または 2 となる目のみであり，かつ $r_k=2$ となる目が偶数回出る**ときに限られます。

r_i \ r_j	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

解答・解説

285 (1) さいころを 4 回続けて投げるとき，3 回以上連続して同じ目が出るのは，1 回目はどの目が出てもよく，2 回目以降は

(i) 1 回目と同じ目が 2 回目，3 回目も出て，4 回目はどの目が出てもよい

(ii) 1 回目とは異なる目が 2 回目に出て，3 回目，4 回目は 2 回目と同じ目が出る

のいずれかであるから，求める確率は

$$1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1+1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\underline{\boldsymbol{\frac{11}{216}}}$$

(2) 3 回目に初めて 1 の目が出るのは，2 回目までに 1 以外の目が出て，3 回目に 1 の目が出る場合だから，求める確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\underline{\boldsymbol{\frac{25}{216}}}$$

また，3 回目に 2 度目の 1 の目が出るのは，2 回目までに 1 の目が 1 回，1 以外の目が 1 回出て，3 回目に 1 の目が出る場合だから，求める確率は

$$\left({}_2C_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{108}}}$$

286 (1) 1，1，2，2，6 の並び方は $\dfrac{5!}{2!\,2!}$ 通りであるから

$$\frac{5!}{2!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{1296}}}$$

(2) さいころを 3 回振るとき，2 の目と 3 の目の両方が出るのは

(i) 2 の目が 2 回，3 の目が 1 回出る

(ii) 2 の目が 1 回，3 の目が 2 回出る

(iii) 2 の目が 1 回，3 の目が 1 回，2，3 以外の目が 1 回出る

のいずれかであるから，求める確率は

$$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+3!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{36}}}$$

287 (1) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_7 の少なくとも 1 つが偶数であるときである。余事象を考えると，求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^7=1-\frac{1}{128}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{127}{128}}}$$

(2) 余事象を考える。積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数でないのは

(i) X_1，X_2，$\cdots$，X_7 のすべてが奇数である

(ii) X_1，X_2，$\cdots$，X_7 の 1 つが 2 または 6 であり，他の 6 個は奇数である

のいずれかであるから，求める確率は

$$1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=1-\frac{17}{384}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{367}{384}}}$$

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_7 を 3 でわった余りが 2 であるものの個数に着目する。

積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 でわったときの余りが 1 であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_7 を 3 でわったとき，余りが 2 であるものが 0 個，2 個，4 個，6 個のいずれかであり，他はすべて余り 1 となるときであるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5+{}_7\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_7\mathrm{C}_6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$$
$$=(1+21+35+7)\left(\frac{1}{3}\right)^7$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{64}{2187}}}$$

2.3　ランダムウォーク

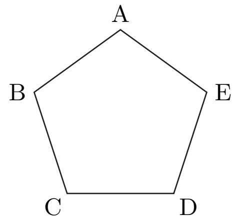
問題

288 x 軸上を動く点 A があり，最初は原点にある。硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけ進み，裏が出たら負の方向に 1 だけ進む。硬貨を 6 回投げるものとして，以下の確率を求めよ。

(1) 硬貨を 6 回投げたときに，点 A が原点に戻る確率

(2) 硬貨を 6 回投げたとき，点 A が初めて原点に戻る確率　　（埼玉大）

289 右図の正五角形 ABCDE の頂点の上を，動点 Q が，頂点 A を出発点として，1 回さいころを投げるごとに，出た目の数だけ反時計回りに進む。たとえば，最初に 2 の目が出た場合には，Q は頂点 C に来て，つづいて 4 の目が出ると，Q は頂点 C から頂点 B に移る。このとき，次の確率を求めよ。



(1) さいころを 3 回投げ終えたとき，Q が頂点 A にある確率

(2) さいころを 3 回投げ終えたとき，Q が初めて頂点 A に戻ってくる確率

（秋田大　改）

290 座標平面上で動点 P が上下左右のいずれかの方向に 1 だけ移動することを 1 回のステップとする。ただし，どの方向に移動する確率も $\frac{1}{4}$ であるとする。動点 P は原点 O から出発する。n 回のステップ後の動点 P の位置を P_n とするとき，

(1) $\mathrm{P}_4 = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ。

(2) 3 回目のステップまでは原点に戻らず，$\mathrm{P}_4 = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ。

（関西大　改）

チェック・チェック

ランダム・ウォークは酔歩（酔っぱらいの千鳥足だね）の問題とも呼ばれているもので，これを応用していろいろな研究がされています。たとえば，結晶の中を飛び回る電子の運動や流体の内部を流れる微粒子の運動（ブラウン運動）などに応用されています。

288 (1) 6 回目に原点に戻るということは，正の方向の移動と負の方向の移動が同じ回数起こるということです。
(2) (1) の確率から，点 A が 2 回目あるいは 4 回目に原点に戻り，6 回目にも原点に戻る確率を引くという考え方もありますが，直接数え上げた方が早いでしょう。

289 1 回目，2 回目，3 回目に出た目を a，b，c とすると $3 \leqq a+b+c \leqq 18$ ですから

(1) は $a+b+c=5,\ 10,\ 15$ となる確率

(2) は $\begin{cases} a+b+c=5,\ 10,\ 15 \\ a,\ a+b \neq (5\text{ の倍数}) \end{cases}$ となる確率

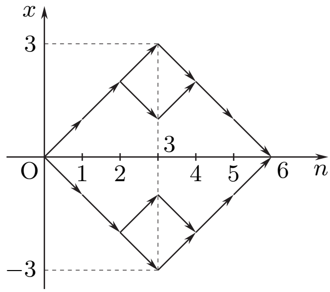
です。

290 (1) 原点に戻るということは，左右の移動回数が同じ，かつ上下の移動回数が同じということです。右（または上）への移動の回数で場合分けするとよいでしょう。
(2) $\mathrm{P}_1=\mathrm{O}$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{O}$ は起こらないので，$\mathrm{P}_2=\mathrm{O}$ かつ $\mathrm{P}_4=\mathrm{O}$ となる確率を (1) の確率から引きます。

解答・解説

288 (1) 点 A が原点に戻るのは，表が 3 回，裏が 3 回出る場合だから

$$
{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3
=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^6}
=\mathbf{\frac{5}{16}}
$$



(2) 硬貨を n 回投げたときの A の座標を x として，nx 平面に移動の仕方を図示すると，右図のように 4 通りあるから

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\mathbf{\frac{1}{16}}$$

別解 点 A が 2 回目と 6 回目に原点に戻る確率は

$$
{}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}
$$

点 A が 4 回目と 6 回目に原点に戻る確率は

$$
{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}
$$

点 A が 2 回目と 4 回目と 6 回目に原点に戻る確率は

$$
\left({}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}
$$

したがって，求める確率は

$$
\frac{5}{16}-\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{16}-\frac{4}{16}=\frac{1}{16}
$$

289 1 回目に a，2 回目に b，3 回目に c だけ進んだとして

$$1\leqq a,\ b,\ c\leqq 6 \quad \cdots\cdots①$$

(1) 3 回の試行では最大で 18 進むので，Q が頂点 A にあるのは

$$a+b+c=5,\ 10,\ 15$$

のときである。これをみたすのは $a\geqq b\geqq c$ として

$$
\begin{aligned}
(a,\ b,\ c)=&(3,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 1),\\
&(6,\ 3,\ 1),\ (6,\ 2,\ 2),\ (5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 3,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 3),\\
&(6,\ 6,\ 3),\ (6,\ 5,\ 4),\ (5,\ 5,\ 5)
\end{aligned}
$$

である。並び替えも考えるとすべての目の出方は

$$4\times3!+6\times\frac{3!}{2!}+1=43\ （通り）$$

以上より，求める確率は

$$\frac{43}{6^3}=\mathbf{\frac{43}{216}}$$

(2) 3 回投げ終えたとき，初めて A に戻ってくるのは (1) における 43 通りの中で，**a も $a+b$ も 5 の倍数でない**ときである。(1) のうち，5 を含まない

$(3,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 1),\ (6,\ 3,\ 1),\ (6,\ 2,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 6,\ 3)$

についてはすべての並び替えを考えて

$$3!+6\times\frac{3!}{2!}=24\ (\text{通り})$$

$(5,\ 5,\ 5)$ 以外で 5 を含む

$(5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 3,\ 2),\ (6,\ 5,\ 4)$

については，$b=5$ となればよいから，$(4,\ 5,\ 1),\ (1,\ 5,\ 4),\ (3,\ 5,\ 2),\ (2,\ 5,\ 3),\ (6,\ 5,\ 4),\ (4,\ 5,\ 6)$ の 6 通り。

以上より求める確率は

$$\frac{24+6}{6^3}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{36}}}$$

290 (1) $P_4=O$ となるのは

(i) 右方向の移動が 0 回のとき，{ 上，上，下，下 } の移動を行う。
(ii) 右方向の移動が 1 回のとき，{ 右，左，上，下 } の移動を行う。
(iii) 右方向の移動が 2 回のとき，{ 右，右，左，左 } の移動を行う。

の 3 通りがある。移動の順序を考えると

(i) $_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$

(ii) $4!\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=24\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$

(iii) $_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$

よって，求める確率は $\quad\frac{6+24+6}{4^4}=\underline{\boldsymbol{\frac{9}{64}}}$

(2) $P_1=O$，$P_3=O$ は起こらないので，$P_2=O$ かつ $P_4=O$ となる確率を (1) の確率から引けばよい。

$P_2=O$ となるのは { 右，左 } または { 上，下 } の移動を行うときであり

$$_2C_1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{4}$$

$P_2=O$ かつ $P_4=O$ となるのは 2 回の移動で O に戻ることを 2 回繰り返すときであるから

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

よって，求める確率は $\quad\frac{9}{64}-\frac{1}{16}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{64}}}$

2.4　いろいろな独立試行・反復試行

問題

291 問題が 4 問あり，各問題の解答群にはそれぞれ 3 つの選択肢がある。各問題の解答群の選択肢から，それぞれでたらめに選択肢を選んだ人が，2 問以上正解する確率はいくらか。　（法政大）

292 3 個の赤玉と 2 個の白玉が入った袋から 1 個の玉を取り出し，玉の色を見てその玉を袋に戻す。この操作を繰り返し行うとき，次の問いに答えよ。

(1) 袋から n 回 $(n \geqq 1)$ 玉を取り出したとき，n 回目に初めて赤玉が出る確率を求めよ。

(2) 袋から 5 回玉を取り出したとき，5 回目に 2 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(3) 袋から n 回玉を取り出したとき，n 回目に m 度目の赤玉が出る確率を求めよ。ただし，$n \geqq m \geqq 1$ とする。　（大阪女子大）

293 A，B の 2 チームが試合をして，先に 3 勝したチームが優勝となる。A が勝つ確率は $\dfrac{3}{5}$，B が勝つ確率は $\dfrac{2}{5}$ である。

(1) A チームが，1 試合目から 3 試合目までで 2 試合に勝ち，4 試合目に勝って優勝する確率を求めよ。

(2) A が優勝する確率を求めよ。　（日本福祉大）

294 ある学校では毎日，A，B，C，D，E の 5 曲の中から異なる 3 曲を無作為に選んで昼休みに放送している。n を任意の自然数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 1 日に曲 A，B が両方とも放送される確率を求めなさい。

(2) n 日間で曲 A，B のいずれもまったく放送されない確率を求めなさい。

(3) n 日間で曲 A が少なくとも 1 度は放送される確率を求めなさい。

(4) n 日間でどの曲も少なくとも 1 度は放送される確率を求めなさい。

（山口大）

チェック・チェック

291 理解してなくても正解となる確率が $\dfrac{1}{3}$ なんですからね。実力を測るのに選択肢を3つというのは出題者の手抜きですね。

正解数が2問，3問，4問の場合の確率を求めてもよいですが，余事象を考えて,「全問不正解か1問だけ正解」の場合の確率を求める方が場合分けが少なくてすみます。

292 赤玉，白玉の出方を具体的に書いてみれば様子がわかってくるでしょう。

(1) は $\underbrace{\text{白白}\cdots\text{白}}_{n-1\text{ 回}}\ \underbrace{\text{赤}}_{n\text{ 回目}}$ ということです。

(2) は (3) のヒントですね。まずは $n=5$ でやってみなさいという出題者の配慮です。

293 (1) A が2勝1敗した後，4試合目で勝つのは，A が勝つことを○，A が負けることを×で表すと

○○×○，　○×○○，　×○○○

の3通りがあり，2勝1敗する確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right) $$

です。

(2) A の優勝が決まるのは

3試合目，4試合目，5試合目

のいずれかです。勝敗の順序に注意しましょう。

294 (1) 3曲放送されるので残りの1曲を決めましょう。

(2) C，D，E の3曲が毎日放送されるということです。

(3) 余事象の確率を考えましょう。

(4) これも余事象の確率を考えましょう。

解答・解説

291　**「2 問以上正解する」の余事象**となるのは,「全問不正解か 1 問だけ正解する」ときである。

(i) 全問不正解のとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

(ii) 1 問だけ正解のとき，何問目に正解したかを考えて

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

よって求める確率は

$$1 - \left(\frac{16}{81} + \frac{32}{81}\right) = \underline{\boldsymbol{\frac{11}{27}}}$$

292　(1)　1 回目から $n-1$ 回目（$n \geqq 2$ のとき）まで白玉が出て，**n 回目に赤玉**が出る確率であるから

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \underline{\boldsymbol{\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5^n}}} \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ})$$

(2)　1 回目から 4 回目までに赤玉が 1 回，白玉が 3 回出て，**5 回目に赤玉**が出る確率であるから

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{5^5} = \underline{\boldsymbol{\frac{288}{3125}}}$$

(3)　1 回目から $n-1$ 回目まで（$n \geqq 2$ のとき）に赤玉が $m-1$ 回，白玉が $n-m$ 回出て，**n 回目に赤玉**が出る確率であるから

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-m} \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \underline{\boldsymbol{\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \cdot \frac{2^{n-m} \cdot 3^m}{5^n}}}$$

（$n = 1$ のときも成り立つ）

293　(1)　A が 1 試合目から 3 試合目までに 2 勝 1 敗し，4 試合目に勝つ確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{162}{625}}}$$

(2)　A が優勝するのは，次の 3 通りである。

(i) A が 3 試合目に勝って優勝（3 勝 0 敗で優勝）
(ii) A が 4 試合目に勝って優勝（3 勝 1 敗で優勝）
(iii) A が 5 試合目に勝って優勝（3 勝 2 敗で優勝）

(i) となるのは，1 試合目から 3 連勝する場合で，その確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

(ii) となる確率は，(1) より

$$\frac{162}{625}$$

(iii) となるのは，1 試合目から 4 試合目までに 2 勝 2 敗し，5 試合目に勝つ場合で，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{648}{3125}$$

したがって，A が優勝する確率は

$$\frac{27}{125}+\frac{162}{625}+\frac{648}{3125}=\underline{\boldsymbol{\frac{2133}{3125}}}$$

294 (1) 1 日に選ばれる 3 曲の組合せは ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りであり，これらは同様に確からしい。そのうち，A，B が両方とも選ばれる組合せは残り 1 曲の選び方で決まるから 3 通りである。求める確率は

$$\underline{\boldsymbol{\frac{3}{10}}}$$

(2) 1 日に A，B のいずれも放送されない確率は $\frac{1}{10}$ だから，求める確率は

$$\underline{\boldsymbol{\left(\frac{1}{10}\right)^n}} \quad \cdots\cdots①$$

(3) 1 日に A が放送されない確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{10}=\frac{2}{5}$$

だから，n 日間で A が放送されない確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \cdots\cdots②$$

よって，n 日間で A が少なくとも 1 度は放送される確率は

$$\underline{\boldsymbol{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$$

(4) $n=1$ のとき，5 曲が放送されることはないので $n \geqq 2$ で考える。

1 日に異なる 3 曲が放送されるから，n 日間で放送されるのは，次の 3 通りである。

(i) 3 曲の場合　(ii) 4 曲の場合　(iii) 5 曲の場合

(i) n 日間で 3 曲が放送される確率は，① より

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10}\right)^n=10\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

(ii) n 日間で 4 曲が放送される確率は，② より

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^n-{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^n=5\left(\frac{2}{5}\right)^n-4\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

以上より，どの曲も少なくとも 1 度は放送される確率，すなわち (iii) のときの確率は

$$1-10\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left\{5\left(\frac{2}{5}\right)^n-4\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

$$=\underline{\boldsymbol{1-6\left(\frac{1}{10}\right)^n-5\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad (n \geqq 2)}}$$

3　条件付き確率，乗法定理

3.1　条件つき確率

問題

295 3 つのサイコロを同時に投げたとき，すべて異なる目が出る事象を A，3 つのサイコロのうち少なくとも 1 つは 1 の目である事象を B とする。次の問に答えなさい。

(1) 事象 A が起こる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 事象 B が起こる確率は $\boxed{}$ である。

(3) 事象 A と事象 B が同時に起こる確率は $\boxed{}$ である。

(4) 事象 B が起ったときの事象 A の起こる条件つき確率は $\boxed{}$ である。

296 赤い玉が 2 個，青い玉が 3 個，白い玉が 5 個ある。これらの 10 個の玉を袋に入れてよくかきまぜ，その中から 4 個をとり出す。とり出したものに同じ色の玉が 2 個あるごとに，これを 1 組としてまとめる。まとめられた組に対して，赤は 1 組につき 5 点，青は 1 組につき 3 点，白は 1 組につき 1 点が与えられる。このときの得点の合計を X とする。

(1) X の値の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。

(2) X が最小値をとる確率は $\boxed{}$ である。また，X が最小値をとるという条件の下で，3 色の玉がとり出される条件つき確率は $\boxed{}$ である。

（センター試験　改）

297 全事象を $U = B_1 \cup B_2$ $(B_1 \cap B_2 = \emptyset)$ とし，$P(A) = \dfrac{1}{4}$，$P(B_1) = \dfrac{1}{3}$，$P_A(B_1) = \dfrac{1}{2}$ とする。以下の設問に答えよ。

(1) $P(A \cap B_1)$，$P(A \cup B_1)$，$P_{B_1}(A)$ の値を求めよ。

(2) $P_A(B_2)$，$P_{B_2}(A)$ の値を求めよ。　（岩手医科大）

チェック・チェック

295 2 つの事象 A，B について，事象 B が起きたときの事象 A の起こる確率を，B が起きたときの A の**条件つき確率**といい，$P_B(A)$ と表します。

右の表のように，$A\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ の場合の数をそれぞれ a，b，c，d，場合の数の総数を $n(=a+b+c+d)$ とすると

	B	$\overline{B}$
A	a	b
$\overline{A}$	c	d

$$\boldsymbol{P_B(A)} = \frac{a}{a+c} = \frac{\dfrac{a}{n}}{\dfrac{a+c}{n}} = \frac{\boldsymbol{P(A\cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$$

と表すことができます。

296 X が最小値 1 をとるという事象を X_1，3 色の玉が取り出されるという事象を Y とすると，求める確率は

$$P_{X_1}(Y) = \frac{P(X_1\cap Y)}{P(X_1)}$$

です。

297 (1) $P(A\cap B_1) = P(A)P_A(B_1)$　（乗法定理）

$$P(A\cup B_1) = P(A) + P(B_1) - P(A\cap B_1)$$　（加法定理）

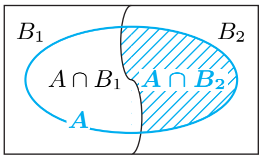
を使います。

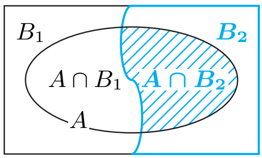
(2) 事象 A，B_1 についての確率が与えられているので

$$P_A(B_2) = 1 - P_A(\overline{B_2}) = 1 - P_A(B_1)$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{P(A\cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(A)P_A(B_2)}{P(B_2)}$$

と変形します。





解答・解説

295 3 つのさいころを同時に投げたとき，目の出方は 6^3 通りであり，これらは同様に確からしい。

(1) すべてが異なる目の出方は $6\cdot5\cdot4$ 通りあるので

$$P(A)=\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{9}}}$$

(2) すべて 1 以外の目が出る確率は $\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$ であるので

$$P(B)=1-\frac{125}{216}=\underline{\boldsymbol{\frac{91}{216}}}$$

(3) 1 の目 1 つと 1 以外の異なる 2 つの目が出ればよく

$$P(A\cap B)=\frac{{}_5C_2\cdot3!}{6^3}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{18}}}$$

(4) (2)，(3) より

$$\boldsymbol{P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{91}{216}}=\frac{5}{18}\cdot\frac{216}{91}=\underline{\boldsymbol{\frac{60}{91}}}$$

296 (1) $X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8$ の 7 通りあり，X の値の最大値は $\underline{\boldsymbol{8}}$，最小値は $\underline{\boldsymbol{1}}$ である。

【参考】取り出した玉の個数と X の値は次のようになる。

白	0	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4
赤	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
青	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0
X	8	5	6	3	3	1	1	3	4	1	2

(2) $X=1$ となるのは，各色の玉の個数が

(白, 赤, 青) $=(2,\ 1,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 1)$

の場合であり

$$P(X=1)=\frac{{}_5C_2\times{}_2C_1\times{}_3C_1+{}_5C_3\times{}_2C_1+{}_5C_3\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}$$
$$=\frac{10\cdot2\cdot3+10\cdot2+10\cdot3}{210}=\underline{\boldsymbol{\frac{11}{21}}}$$

また，$X=1$ であり，かつ 3 色の玉が取り出されるのは (白, 赤, 青) $=(2,\ 1,\ 1)$ のときだけなので，この確率は

$$\frac{{}_5C_2\times{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{10\cdot2\cdot3}{210}=\frac{2}{7}$$

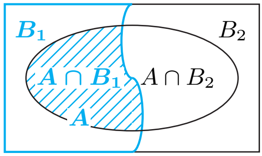
よって，求める確率は

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{11}=\underline{\boldsymbol{\frac{6}{11}}}$$

297 (1) $P(A \cap B_1) = P(A) \times P_A(B_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \underline{\mathbf{\dfrac{1}{8}}}$

$$P(A \cup B_1) = P(A) + P(B_1) - P(A \cap B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \underline{\mathbf{\frac{11}{24}}}$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \underline{\mathbf{\frac{3}{8}}}$$

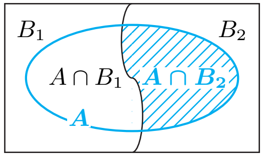


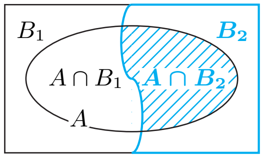
(2) $U = B_1 \cup B_2$，$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ なので

$$P_A(B_2) = 1 - P_A(B_1) = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

また

$$\begin{aligned} P_{B_2}(A) &= \frac{P(B_2 \cap A)}{P(B_2)} = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} \\ &= \frac{P(A)P_A(B_2)}{1 - P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} \\ &= \underline{\mathbf{\frac{3}{16}}} \end{aligned}$$





3.2　乗法定理

問題

298 10 本のくじがあり，そのうち 2 本が当たりくじである。このくじから A 君，B 君，C 君がこの順で 1 本ずつ引く。このとき，C 君が当たる確率は $\boxed{}$ であり，また，3 人のうち少なくとも 1 人が当たる確率は $\boxed{}$ である。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。（愛知工業大）

299 以下の問で，各人はじゃんけんでグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。

(1) 3 人でじゃんけんを 1 回するとき，1 人が勝ち 2 人が負ける確率は $\boxed{}$，あいこになる確率は $\boxed{}$ である。

(2) 3 人でじゃんけんをする。負けた人がいれば，じゃんけんから抜け，1 人の勝者が決まるか，じゃんけんの回数が 3 回になるまで繰り返す。じゃんけんの回数が 2 回以内で 1 人の勝者が決まる確率は $\boxed{}$，ちょうど 3 回で 1 人の勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。（上智大　改）

300 白色の玉が 1 個，黒色の玉が 2 個，赤色，黄色，緑色の玉がそれぞれ 3 個ずつ，全部で 12 個の玉が袋に入っている。この袋から A が 4 個の玉を同時に取り出し，次にこれらの玉をもとに戻さずに B が 4 個の玉を同時に取り出す。次の事象 E，F，G を考える。

E：A の取り出した玉の色がすべて異なる。

F：B の取り出した玉の色がすべて異なる。

G：A の取り出した玉の色の組合せと B の取り出した玉の色の組合せが一致する。

(1) E が起こる事象の確率 $P(E)$ を求めよ。

(2) E，G がともに起こる事象の確率 $P(E\cap G)$ を求めよ。

(3) E，F がともに起こる事象の確率 $P(E\cap F)$ を求めよ。

（京都工芸繊維大）

チェック・チェック

　条件つき確率の式

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

の分母を払うと，2 つの事象 A，B がともに起こる確率

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P_A(B)}$$

が得られます。これを確率の**乗法定理**といいます。

298 C 君が当たるようなくじの引き方にはどのような場合があるかを考えましょう。

　実は，当たりくじを引く確率は，**くじを引く順番に無関係**に決まります。一般に，くじが n 本あり，そのうち r 本が当たりくじであるとします。1 番目の人が当たりくじを引くという事象を A，2 番目の人が当たりくじを引くという事象を B とすると

$$P(A)=\frac{r}{n},$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)\\&=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}=\frac{r(r-1+n-r)}{n(n-1)}=\frac{r}{n}\end{aligned}$$

したがって，$P(A)=P(B)$ となります。

　3 番目以降の人が当たりくじを引く確率についても同様に示すことができますが，場合分けが増えます。そこで，n 本のくじを 1 列に並べた順列を考えてみましょう。

　k 番目の人が当たりくじを引くことは，k 番目に当たりくじが並んでいることに対応します。k 番目に並ぶ当たりくじの決め方は r 通りあるから，k 番目の人が当たりくじを引く確率は

$$\frac{r(n-1)!}{n!}=\frac{r}{n}$$

です。

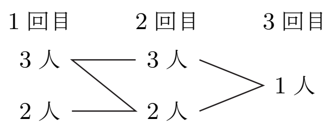
○	×	……	○	……	×
1	2		k		n

299 (1) 3 人のじゃんけんであいことなるのは

　3 人とも同じ手を出す場合
　3 人がすべて異なる手を出す場合

がありますが，余事象を考える方がよいでしょう。

(2) ちょうど 3 回で 1 人の勝者が決まる場合の人数の推移を樹形図にすると，右のようになります。



300 (1) 条件をみたす玉の色の決め方により ${}_5\mathrm{C}_4$ 通りに場合分けします。

(2) E，G がともに起こるような玉の取り出し方を考えます。(3) も同様です。

解答・解説

298 C 君が当たるようなくじの引き方は

(i) A 君が当たり，B 君がはずれ，C 君が当たる
(ii) A 君がはずれ，B 君が当たり，C 君が当たる
(iii) A 君がはずれ，B 君がはずれ，C 君が当たる

場合があるから，求める確率は

$$\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{5}}}$$

また，3 人のうち少なくとも 1 人が当たる確率は

$$1-(3\text{ 人のうち誰も当たらない確率})=1-\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}=\underline{\boldsymbol{\frac{8}{15}}}$$

別解 10 本のくじをすべて並べて，左から A 君，B 君，C 君が順次くじを引いていくと考えると，C 君が当たる確率は $\dfrac{2\cdot 9!}{10!}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

少なくとも 1 人が当たる確率は $1-\dfrac{{}_8P_3\cdot 7!}{10!}=1-\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{8}{15}$

299 (1) 3 人でじゃんけんをするとき，手の出し方は 3^3 通りあり，これらは同様に確からしい。

1 人が勝ち 2 人が負ける確率は，誰がどの手で勝つかを考えて

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{3^3}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

2 人が勝ち 1 人が負ける確率も同様に $\dfrac{1}{3}$ だから，あいこになる確率は

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

(2) 1 回で勝者が決まる確率は (1) より $\dfrac{1}{3}$

2 回で勝者が決まるのは

(i) 1 回目はあいこで，2 回目に 1 人が勝つ
(ii) 1 回目に 2 人が勝ち，2 回目に 1 人が勝つ

場合である。(i) となる確率は (1) より $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

また，(ii) となる場合について，2 人でじゃんけんをしたとき

1 人が勝つ確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{3^2}=\dfrac{2}{3}$，あいことなる確率は $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

だから，(ii) となる確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$

したがって，2 回で勝者が決まる確率は $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

以上より，2 回以内に勝者が決まる確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}$$

ちょうど 3 回で勝者が決まるのは

(i) 1 回目はあいこで，2 回目もあいこで，3 回目に 1 人が勝つ
(ii) 1 回目はあいこで，2 回目は 2 人が勝ち，3 回目に 1 人が勝つ
(iii) 1 回目は 2 人が勝ち，2 回目はあいこで，3 回目に 1 人が勝つ

場合である。したがって，求める確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{27}}}$$

300 (1) A の玉の取り出し方は ${}_{12}\mathrm{C}_4$ 通りあり，これらは同様に確からしい。このうち，取り出した玉の色がすべて異なる取り出し方は,「白黒赤黄」,「白黒赤緑」,「白黒黄緑」,「白赤黄緑」,「黒赤黄緑」のいずれかを取り出す場合であるから，求める確率 $P(E)$ は

$$P(E)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot3\cdot3+1\cdot3\cdot3\cdot3+2\cdot3\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{11}}}$$

(2) E，G がともに起こるような取り出し方は，A が「黒赤黄緑」を取り出し，続いて，B も「黒赤黄緑」を取り出す場合であるから，求める確率 $P(E\cap G)$ は

$$P(E\cap G)=\frac{2\cdot3\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\frac{1\cdot2\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\underline{\boldsymbol{\frac{24}{1925}}}$$

(3) E，F がともに起こるような取り出し方のうち，A が白玉を取り出すのは，A が「白黒赤黄」,「白黒赤緑」,「白黒黄緑」,「白赤黄緑」のいずれかを取り出し，続いて，B が「黒赤黄緑」を取り出す場合であるから，このときの確率は

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\frac{1\cdot2\cdot2\cdot3}{{}_8\mathrm{C}_4}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\frac{1\cdot2\cdot3\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}$$
$$+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\frac{1\cdot3\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}+\frac{1\cdot3\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{60}{1925}$$

また，E，F がともに起こるような取り出し方のうち，B が白玉を取り出すのは，A が「黒赤黄緑」を取り出し，続いて，B が「白黒赤黄」,「白黒赤緑」,「白黒黄緑」,「白赤黄緑」のいずれかを取り出す場合であるから，このときの確率は

$$\frac{2\cdot3\cdot3\cdot3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}\times\left(\frac{1\cdot1\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}+\frac{1\cdot1\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}+\frac{1\cdot1\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}+\frac{1\cdot2\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{C}_4}\right)$$
$$=\frac{60}{1925}$$

これらと (2) の結果を合わせたものが求める確率だから

$$P(E\cap F)=\frac{60}{1925}+\frac{60}{1925}+\frac{24}{1925}=\underline{\boldsymbol{\frac{144}{1925}}}$$

3.3 原因の確率

問題

301 3 つの箱 A，B，C がありそれぞれに黒球，白球，赤球が入っている。それらの個数は右の表の通りである。でたらめに 1 つの箱を選び，球を 1 つ取り出す。

	A	B	C
黒球	5	7	2
白球	20	17	22
赤球	15	60	24

(1) 取り出した球が黒球である確率を求めよ。

(2) 取り出した球が黒球のとき，それが箱 A から取り出された確率を求めよ。 (学習院大)

302 乙のところにあるつぼ A，B は甲には見えない。A には赤球 2 個，白球 8 個が，B には赤球 7 個，白球 3 個が入っている。乙は甲にクイズを出し，甲の答えが正しければつぼ A から，誤りならばつぼ B から無作為に 1 球選び，甲に手渡す。甲が正答する確率は $\dfrac{1}{3}$ である。次の確率を求めよ。

(1) 甲が乙から白球を受けとる確率

(2) 甲が乙から白球を受けとったとき，甲の答が正答だった確率 (筑波大)

303 ある病原菌の感染を調べる試薬がある。この試薬で検査したとき，感染しているのに陰性と判定される確率が $\dfrac{1}{100}$，感染していないのに陽性と判定される確率が $\dfrac{3}{100}$ であるとする。各個体が確率 $\dfrac{5}{100}$ で感染している集団があるとする。

(1) この中の 1 個体が，感染していてかつこの試薬によって陽性と判定される確率を求めよ。

(2) この中の 1 個体がこの試薬によって陽性と判定される確率を求めよ。

(3) ある個体が陽性と判定された。このとき，実際は感染していない確率を求めよ。 (信州大)

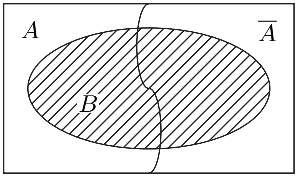
チェック・チェック

ある事象が起こったという結果から，この結果をもたらした原因がどの事象によるものなのかを考えることがあります。このときの確率を**原因の確率**といいます。

時間の流れから考えると，原因があって結果が生じるのですから，原因の確率は時間を逆行することにはなりますが，これに対しては条件つき確率が対処してくれます。

互いに排反な事象 A，$\overline{A}$ のどちらかを原因として，事象 B が起こったとしてみましょう。B が起こった原因が A である確率は

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)} \end{aligned}$$



となります。これを**ベイズの定理**といいます。$B\cap A = A\cap B$ という当たり前の式が時間の逆行を可能にしてくれています。

301 箱 A，B，C を選ぶという事象をそれぞれ A，B，C，**黒球を取り出すという事象を X** とすると

(1) $P(X)=P(A\cap X)+P(B\cap X)+P(C\cap X)$ が成り立ちます。

(2) $P_X(A)$ を求めます。

302 甲の答が正答であるという事象を E，**甲が乙から白球を受けとるという事象を F** とすると

(1) $P(F)=P(E\cap F)+P(\overline{E}\cap F)$ が成り立ちます。

(2) $P_F(E)$ を求めます。

303 病原菌に感染しているという事象を E，試薬によって陽性と判定されるという事象を F とすると

(1) $P(E\cap F)$ を求めます。

(2) $P(F)=P(E\cap F)+P(\overline{E}\cap F)$ が成り立ちます。

(3) $P_F(\overline{E})$ を求めます。

解答・解説

301 (1) 箱 A，B，C を選ぶという事象をそれぞれ A，B，C とし，黒球を取り出すという事象を X とすると

(i) 箱 A を選び，黒球を取り出す確率は

$$P(A \cap X) = P(A)P_A(X) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{40} = \frac{1}{24}$$

(ii) 箱 B を選び，黒球を取り出す確率は

$$P(B \cap X) = P(B)P_B(X) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{84} = \frac{1}{36}$$

(iii) 箱 C を選び，黒球を取り出す確率は

$$P(C \cap X) = P(C)P_C(X) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{48} = \frac{1}{72}$$

したがって，求める確率 $P(X)$ は

$$P(X) = \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{12}}}$$

(2) 求める確率は

$$P_X(A) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

302 (1) 甲の答が正答であるという事象を E とし，甲が乙から白球を受けとるという事象を F とする。

(i) 甲が正答して，つぼ A から白球が選ばれる確率は

$$P(E \cap F) = P(E)P_E(F) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{15}$$

(ii) 甲が正答せず，つぼ B から白球が選ばれる確率は

$$P(\overline{E} \cap F) = P(\overline{E})P_{\overline{E}}(F) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

したがって，求める確率は

$$P(F) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{15}}}$$

(2) 求める確率は

$$P_F(E) = \frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}}}$$

303 病原菌に感染しているという事象を E，試薬によって陽性と判定されるという事象を F とすると，与えられた条件は

$$P_E(\overline{F}) = \frac{1}{100},\quad P_{\overline{E}}(F) = \frac{3}{100},\quad P(E) = \frac{5}{100}$$

である。

(1)
$$\begin{aligned} P(E\cap F) &= P(E)P_E(F) = P(E)\{1 - P_E(\overline{F})\} \\ &= \frac{5}{100}\times\left(1-\frac{1}{100}\right) = \frac{5}{100}\times\frac{99}{100} \\ &= \underline{\mathbf{\frac{99}{2000}}} \end{aligned}$$

(2) $F = (E\cup\overline{E})\cap F = (E\cap F)\cup(\overline{E}\cap F)$，$(E\cap F)\cap(\overline{E}\cap F) = \emptyset$ なので

$$\boldsymbol{P(F) = P(E\cap F) + P(\overline{E}\cap F)}$$

ここで

$$\begin{aligned} P(\overline{E}\cap F) &= P(\overline{E})P_{\overline{E}}(F) = \{1 - P(E)\}P_{\overline{E}}(F) \\ &= \left(1-\frac{5}{100}\right)\cdot\frac{3}{100} \\ &= \frac{57}{2000} \end{aligned}$$

であるから，これと (1) の結果より

$$P(F) = \frac{99}{2000} + \frac{57}{2000} = \underline{\mathbf{\frac{39}{500}}}$$

(3) (2) より

$$\boldsymbol{P_F(\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}\cap F)}{P(F)}} = \frac{\frac{57}{2000}}{\frac{39}{500}} = \underline{\mathbf{\frac{19}{52}}}$$