問題

多項定理

8 $(2x-y-3z)^6$ を展開して整理すると，項の数は全部で $\boxed{}$，xy^3z^2 の係数は $\boxed{}$ である。 （立教大）

9 $(x^2-2x+3)^5$ の展開式における x^3 の係数は $\boxed{}$ である。 （名城大　改）

チェック・チェック

多項定理

8 $(x+y+z)^n$ の展開式における一般項は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}x^py^qz^r \quad (p+q+r=n,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0)$$

で与えられ，これを**多項定理**といいます。

9 一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot 3^r \quad (p+q+r=5,\ p,\ q,\ r \text{ は 0 以上の整数})$$

です。

解答・解説

多項定理

8 $(2x-y-3z)^6$ の展開は，$2x$，$-y$，$-3z$ の **3 種類の項から重複を許して 6 つの項を取り出して**かけるので，項数は

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=\underline{\mathbf{28}}$$

xy^3z^2 の係数は，多項定理より

$$\frac{6!}{1!\,3!\,2!}\cdot 2\cdot(-1)^3\cdot(-3)^2=\underline{\mathbf{-1080}}$$

9 $(x^2-2x+3)^5$ を x について展開したときの一般項は，多項定理より

$$\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot 3^r=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot 3^r\cdot x^{2p+q}\ \cdots\cdots\ ①$$

x^3 の項が現れるのは

$$\begin{cases}2p+q=3\\ p+q+r=5\\ p,\ q,\ r\ \text{は 0 以上の整数}\end{cases}$$

より

$$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3)$$

のときである。したがって，x^3 の係数は①より

$$\frac{5!}{0!3!2!}\cdot(-2)^3\cdot 3^2+\frac{5!}{1!1!3!}\cdot(-2)^1\cdot 3^3=-720-1080=\underline{\mathbf{-1800}}$$