問題

二項定理の応用

10 一般に ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$ という和の結果を利用すれば，${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = \boxed{}$ であることがわかる。また，前式の各項に交互に正負をつけた次のような場合も簡単になる。

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = \boxed{} $$

（武庫川女子大）

11 自然数 n に対して

$$ a_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n \quad （{}_n\mathrm{C}_k は二項係数） $$

とする。このとき，a_n を n の式で表すと $a_n = \boxed{}$ である。

（愛知工業大）

12 (1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ を証明せよ。

(2) $\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}}{4^n}$ を求めよ。

（広島大）

チェック・チェック

二項定理の応用

10 $(1+x)^n$ の展開式において $x = 1,\ -1$ を代入してみてください。

11 $(1+x)^n$ の展開式において $x = 2$ を代入するとよいでしょう。

12 **10** の後半の等式において n を $2n$ に置き換えてみてください。

解答・解説

二項定理の応用

10 二項定理より

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n \quad \cdots\cdots ① $$

が成り立つ。$\boldsymbol{x=1}$ を代入して

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = (1+1)^n = \underline{\boldsymbol{2^n}} $$

また，①において，$\boldsymbol{x=-1}$ を代入すると

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = (1-1)^n = \underline{\boldsymbol{0}} $$

11 二項定理より

$$ \begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 2^0 \cdot 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2^1 \cdot 1^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 \cdot 1^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n \cdot 1^0 \\ &= \boldsymbol{(1+2)^n} = \underline{\boldsymbol{3^n}} \end{aligned} $$

12 (1) 二項定理より

$$ (1+x)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 x + {}_{2n}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} x^{2n} \quad \cdots\cdots ① $$

であり，$\boldsymbol{x=-1}$ を代入して

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 - {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 0 \quad \cdots\cdots ② $$

$$ \therefore \quad {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} \qquad \text{(証終)} $$

(2) ①において，$\boldsymbol{x=1}$ を代入して

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 2^{2n} = 4^n \quad \cdots\cdots ③ $$

② + ③ より

$$ 2\left({}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\right) = 4^n $$

$$ \therefore \quad \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}}{4^n} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}} $$