問題

恒等式

13 $\left(x+\boxed{}\right)\left(x-\boxed{}\right)(x^2-x+1)$

$$=x^4-\boxed{}x^3-4x^2+\boxed{}x-6$$

が成り立つ。ただし，空欄は自然数とする。　(近畿大)

14 $x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の和 $a+b+c$ の値を求めよ。　(防衛医科大)

チェック・チェック

恒等式

どんな x の値に対しても成り立つ等式を x についての**恒等式**といいます。恒等式において，未知の係数を定めるには

(1) **係数比較**

(2) **数値代入**

の 2 つの方法があります。

13 係数比較をしてみます。

14 数値代入の方法がよいでしょう。代入する数値は右辺の計算がラクなものを選びます。

解答・解説

恒等式

13 与式を

$$(x+a)(x-b)(x^2-x+1)=x^4-cx^3-4x^2+dx-6$$

とおく。左辺を展開すると

$$\begin{aligned}&\{x^2+(a-b)x-ab\}(x^2-x+1)\\ &=x^4+(a-b-1)x^3+(b-a-ab+1)x^2+(ab+a-b)x-ab\end{aligned}$$

同じ次数の項の**係数を比較する**と

$$\begin{cases}a-b-1=-c & \cdots\cdots①\\ b-a-ab+1=-4 & \cdots\cdots②\\ ab+a-b=d & \cdots\cdots③\\ -ab=-6 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

④，②より　$ab=6$ かつ $b-a=1$

$b=a+1$ となるから

$$a(a+1)=6 \qquad \therefore \quad (a+3)(a-2)=0$$

a は自然数より　$a=2$　$\therefore$　$b=3$

①，③に代入して　$c=2$，$d=5$

a，b，c，d が自然数であることをみたすから

$$(x+\underline{\mathbf{2}})(x-\underline{\mathbf{3}})(x^2-x+1)=x^4-\underline{\mathbf{2}}x^3-4x^2+\underline{\mathbf{5}}x-6$$

14 $x^3-4x^2+9x-10=(x-1)^3+a(x-2)^2+b(x-3)+c$

に **$x=1$，2，3 を代入** すると

$$\begin{cases}1-4+9-10=a-2b+c\\ 8-16+18-10=1-b+c\\ 27-36+27-10=8+a+c\end{cases}$$

すなわち　$$\begin{cases}a-2b+c=-4\\ -b+c=-1\\ a+c=0\end{cases} \qquad \therefore \quad a=-1,\ b=2,\ c=1$$

したがって　$\underline{\boldsymbol{a+b+c=2}}$

別解 係数比較で解くと

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+9x-10&=(x^3-3x^2+3x-1)+a(x^2-4x+4)+b(x-3)+c\\ &=x^3+(a-3)x^2+(-4a+b+3)x+4a-3b+c-1\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases}-4=a-3\\ 9=-4a+b+3\\ -10=4a-3b+c-1\end{cases} \qquad \therefore \quad a=-1,\ b=2,\ c=1$$

よって　$a+b+c=2$