問題

比例式

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}\neq 0$ のとき，x，y，z を最も簡単な整数比で表すと $x:y:z=\boxed{}$ である。（日本工業大）

18 実数 a，b，c は $\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{c}:\dfrac{c}{a}=1:4:2$ をみたしている。

(1) $a:b:c$ を求めよ。

(2) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=1$ が成り立つとき，a，b，c の値を求めよ。

（北海学園大）

チェック・チェック

比例式

$a:b=c:d$ が成り立つとき，a，b と c，d は比例するといいます。

$$a:b=c:d \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (:\text{は}\div)$$
$$\iff ad=bc \quad (\text{外項の積}=\text{内項の積})$$

また，$a:b:c$ のことを連比といい

$$a:b:c=x:y:z \iff \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

が成り立ちます（分母が 0 のときは分子も 0 となるものとします）。

いずれにせよ $\begin{cases} a=kx \\ b=ky \\ c=kz \end{cases}$ とおき直すことができます。

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (\neq 0)$ とおきましょう。

18 $\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{c}:\dfrac{c}{a}=1:4:2$ より $\dfrac{a}{b}=k$，$\dfrac{b}{c}=4k$，$\dfrac{c}{a}=2k\ (k\neq 0)$ とおくことができます。

解答・解説

比例式

17 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k$ $(\neq 0)$ とおくと

$$\frac{x+y}{3}=k,\quad \frac{y+z}{4}=k,\quad \frac{z+x}{5}=k$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x+y=3k & \cdots\cdots ① \\ y+z=4k & \cdots\cdots ② \\ z+x=5k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③の 3 つの式の辺々を加えて

$$2(x+y+z)=12k \qquad \therefore\quad x+y+z=6k \quad \cdots\cdots ④$$

②，④より　$x=2k$
③，④より　$y=k$
①，④より　$z=3k$
$k\neq 0$ より　$\underline{\boldsymbol{x:y:z=2:1:3}}$

18 (1) 条件より

$$\frac{a}{b}=k,\quad \frac{b}{c}=4k,\quad \frac{c}{a}=2k \quad (k\neq 0)$$

とおける。3 式の辺々をかけて

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=k\cdot 4k\cdot 2k \qquad \therefore\quad 8k^3=1$$

$8k^3-1=0$ であるから，左辺を因数分解すると

$$(2k-1)(4k^2+2k+1)=0$$

ここで，k は実数より $4k^2+2k+1=4\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ であるから

$$2k-1=0 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{b}{c}=2$，$\dfrac{c}{a}=1$ となるから

$$b=2a,\quad c=a \quad (a\neq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a:b:c}}=a:2a:a=\underline{\boldsymbol{1:2:1}}$$

(2) 条件式の左辺に①を代入すると

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=\frac{a^2}{2a+a}+\frac{(2a)^2}{a+a}+\frac{a^2}{a+2a}$$
$$=\frac{a}{3}+2a+\frac{a}{3}=\frac{8}{3}a$$

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=1$ であるから

$$\frac{8}{3}a=1 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{3}{8},\ b=\frac{3}{4},\ c=\frac{3}{8}}}$$