問題

相加・相乗平均の関係の応用

22 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき $(a+b)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqq 4\sqrt{\frac{ab}{cd}}$ が成り立つことを示せ。 (津田塾大)

23 すべての $a>0$ に対して，$a+\frac{4}{a} \geqq b$ をみたす最大の b は $\boxed{}$ である。 (慶應義塾大)

24 x が正の数のとき，$x+\frac{16}{x}$ の最小値は $\boxed{}$ であり，$x+\frac{16}{x+2}$ の最小値は $\boxed{}$ である。 (九州産業大)

25 x が正の数のとき，$\frac{x}{x^2+16}$ の最大値は $\boxed{}$ であり，このとき，x の値は $\boxed{}$ である。 (九州産業大)

チェック・チェック

相加・相乗平均の関係の応用

22 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき，2 つの不等式

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}, \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}}$$

が成り立ち，これらを利用します。

23 k は正の定数で，$x>0$ のとき，相加・相乗平均の関係より

$$x+\frac{k}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{k}{x}} = 2\sqrt{k} \quad (一定)$$

なので，等号が成立することが確認できたら，$2\sqrt{k}$ が最小値といえます。**等号成立の確認**を忘れないでください。

24 $x+\frac{16}{x+2}$ は **$x+2=t$ とおく**と $t>2$ で

$$(t-2)+\frac{16}{t} = t+\frac{16}{t}-2$$

と変形できます。

25 $\frac{x}{x^2+16}$ の**分子・分母をそれぞれ x でわる**と $\frac{1}{x+\frac{16}{x}}$ と変形できます。

解答・解説

相加・相乗平均の関係の応用

22 $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots ①, \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{cd}} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の辺々をかけると　$(a+b)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{cd}} = 4\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ かつ $c=d$ のときである。　（証終）

23 $a>0,\ \dfrac{4}{a}>0$ より　$a+\dfrac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}} = 4$（等号成立は $a=2$ のとき）

よって，$a+\dfrac{4}{a} \geqq b$ をみたす最大の b は $\underline{\mathbf{4}}$

24 $x>0,\ \dfrac{16}{x}>0$ より　$x+\dfrac{16}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{16}{x}} = 8$

等号成立は $x=\dfrac{16}{x}$ より $x=4$ のときで，最小値は $\underline{\mathbf{8}}$

また，$x+2=t$ とおくと $t>2(>0)$ より

$$x+\frac{16}{x+2} = t-2+\frac{16}{t} = \left(t+\frac{16}{t}\right)-2 \geqq 8-2=6$$

等号成立は $t=4$ より $x=2$ のときで，最小値は $\underline{\mathbf{6}}$

25 $x>0$ より $\dfrac{x}{x^2+16} = \dfrac{1}{x+\dfrac{16}{x}}$ であり，（分母）$=x+\dfrac{16}{x}$ は，

前の問題 **24** より，$x=4$ のとき最小値 8 をとる。

よって，$\dfrac{x}{x^2+16}$ は $x=\underline{\mathbf{4}}$ のとき，最大値 $\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}}$ をとる。