問題

複素数の相等

36 $z^2 = 4 + 3i$ をみたす複素数 z は

$$z = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\,i \text{ または } z = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\,i$$

である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$は実数で，$i^2 = -1$ である。　（関西学院大）

37 a，b を実数 $(a \neq 0)$ とするとき，次の式が成立する。ただし，i は虚数単位である。

$$(3 + 2i)(1 - 5i) = (13 + ai)(1 - bi)$$

このとき，$a = \boxed{}$ である。　（八戸工業大　改）

38 等式 $(1 + i)x^2 - (2 - 3i)x - (3 - 2i) = 0$ をみたす実数 x の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。　（武蔵工業大）

チェック・チェック

複素数の相等

a，b，c，d を実数，i を虚数単位とするとき

$$\boldsymbol{a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}}$$

とくに，$a + bi = 0 \iff a = b = 0$

36 $z = x + yi$（x，y は実数）とおいて，z^2 を計算します。

37 両辺をそれぞれ展開し，実部・虚部を比較します。

38 虚数を係数とする 2 次方程式の問題です。x は実数なので i について整理すると $f(x) + g(x)i = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ となります。

解答・解説

複素数の相等

36 $z = x + yi$（x，y は実数）とおくと

$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$z^2 = 4 + 3i$ であるから

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 4 + 3i$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & \cdots\cdots ① \\ 2xy = 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$y \neq 0$ より ②から $x = \dfrac{3}{2y}$ である。これを①へ代入して

$$\frac{9}{4y^2} - y^2 = 4$$

$$4y^4 + 16y^2 - 9 = 0 \qquad \therefore \quad (2y^2+9)(2y^2-1) = 0$$

$y^2 > 0$ より　$y^2 = \dfrac{1}{2}$　$\therefore \quad y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

②より　$x = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（複号同順）

以上より　$z = \underline{\dfrac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}} + \underline{\dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}}i$　または　$\underline{-\dfrac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}} + \underline{\dfrac{\mathbf{-\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}}i$

37 $(3+2i)(1-5i) = (13+ai)(1-bi)$ において

$$(\text{左辺}) = 3 - 15i + 2i - 10i^2 = 13 - 13i$$

$$(\text{右辺}) = 13 - 13bi + ai - abi^2 = 13 + ab + (a - 13b)i$$

a，b は実数であるから，複素数の相等より

$$\begin{cases} 13 = 13 + ab \\ -13 = a - 13b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} ab = 0 & \cdots\cdots ① \\ a = 13b - 13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a \neq 0$ より，①から　$b = 0$

②より　$a = \underline{\mathbf{-13}}$

38 x は実数であるから，与式を実部と虚部に分けると

$$(1+i)x^2-(2-3i)x-(3-2i)=0$$

$$\therefore\quad x^2-2x-3+(x^2+3x+2)i=0$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 & \cdots\cdots ① \\ (x+1)(x+2)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

よって，①，②をともにみたす実数 x は　$\underline{\boldsymbol{x=-1}}$

【参考】本問は虚数を係数とする 2 次方程式の実数解を求めたわけだが，解の範囲を複素数まで広げると，本問の 2 次方程式の解は

$$(x-3)(x+1)+(x+1)(x+2)i=0$$

$$(x+1)\{(1+i)x-3+2i\}=0$$

$$\therefore\quad x=-1,\ \frac{3-2i}{1+i}\left(=\frac{1-5i}{2}\right)$$