問題

虚数解をもつ 3 次方程式

58 x の方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $1-2i$ を解にもつとき，実数 a，b の値と，他の 2 つの解を求めよ。（岡山理科大）

59 3 次方程式 $x^3+7x^2+ax+4a+27=0$（a は実数）が 1 つの実数解と 2 つの純虚数解をもつとき，その実数解は $\boxed{}$ であり，純虚数解は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。ただし，純虚数とは実部が 0 の虚数のことである。（愛知工業大）

チェック・チェック

虚数解をもつ 3 次方程式

58 $1-2i$ が $f(x)=0$ の解であることより $f(1-2i)=0$ が成り立ちます。また，$f(x)$ が実数を係数とする多項式のとき，虚数 α が解ならば共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解になります。

59 3 つの解は p，qi，$-qi$（p，q は実数，$q \neq 0$）とおけます。**3 次方程式の解と係数の関係**を利用します。

解答・解説

虚数解をもつ 3 次方程式

58 $x^3-5x^2+ax+b=0$ は $1-2i$ を解にもつので

$$(1-2i)^3-5(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$$
$$-11+2i-5(-3-4i)+(a+b)-2ai=0$$
$$\therefore\quad (4+a+b)+(22-2a)i=0$$

a，b は実数なので

$$\begin{cases}4+a+b=0\\22-2a=0\end{cases}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=11,\ b=-15}}$$

これを与式に代入して

$$x^3-5x^2+11x-15=0\qquad\therefore\quad (x-3)(x^2-2x+5)=0$$

よって，他の 2 つの解は

$$\underline{\boldsymbol{x=3,\ 1+2i}}$$

別解 $1-2i$ が解より $1+2i$ も解である。残りの解を α とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(1-2i)+(1+2i)+\alpha=5\\(1-2i)(1+2i)+(1+2i)\alpha+\alpha(1-2i)=a\\(1-2i)(1+2i)\alpha=-b\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2+\alpha=5\\5+2\alpha=a\\5\alpha=-b\end{cases}\qquad\therefore\quad \alpha=3,\ a=11,\ b=-15$$

59 実数を係数とする 3 次方程式が純虚数解をもつので，3 つの解は

p，qi，$-qi$（p，q は実数で $q\neq 0$）

とおける。**3 次方程式の解と係数の関係**より

$$\begin{cases}p+qi-qi=-7\\p\cdot qi+qi(-qi)-qi\cdot p=a\\p\cdot qi(-qi)=-4a-27\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}p=-7 & \cdots\cdots①\\q^2=a & \cdots\cdots②\\pq^2=-4a-27 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②を③に代入すると

$$-7a=-4a-27\qquad\therefore\quad a=9$$

②より

$$q=\pm 3$$

よって

実数解は $\underline{\boldsymbol{-7}}$，純虚数解は $\underline{\boldsymbol{\pm 3i}}$