問題

±1 の虚数立方根

60 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ に対して，ω^8 は $\boxed{} + \boxed{}\,i$ となる。
ただし i は虚数単位とする。（立教大）

61 $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $1+\omega+\omega^2 = \boxed{}$

(2) $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2) = \boxed{}$

(3) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = \boxed{}$ （徳島文理大）

62 $z^3 = -1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき

$$(\omega^2+\omega+1)^6 + (\omega^2+\omega-1)^6 + (\omega^2-\omega+1)^6 + (\omega^2-\omega-1)^6 + (-\omega^2-\omega+1)^6 = \boxed{}$$

となる。（帝京大）

63 方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする。また，n を自然数とする。このとき，n が 3 の倍数であれば，$\alpha^n+\beta^n = \boxed{}$ である。n が 3 の倍数でなければ，$\alpha^n+\beta^n = \boxed{}$ である。また，n が 3 の倍数でないとき，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式は $x^2+x+\boxed{} = 0$ である。
（広島修道大）

チェック・チェック

±1 の虚数立方根

60 $\omega^8 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^8$ の計算は無謀です。

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $2\omega+1=\sqrt{3}i$ であり，両辺を平方すると ω についての 2 次の等式

$$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$$

が得られます。さらに両辺に $\omega-1$ をかけると

$$\boldsymbol{\omega^3=1}$$

が得られます。まずは ω^8 の次数下げを考えましょう。

61 $z^3=1$ の解は

$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \qquad \therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であり，$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を **1 の虚数立方根**といいます。

一方を ω とおくと，他方は共役複素数 $\overline{\omega}$ であり

(i) $\omega^3=1$，$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$

(ii) $\omega+\overline{\omega}=-1$，$\omega\overline{\omega}=1$

(iii) $\omega^2=-\omega-1=\overline{\omega}$

といった性質があります。

62 本問の ω は -1 の虚数立方根です。

(i) $\omega^3=-1$，$\omega^2-\omega+1=0$

(ii) $\omega+\overline{\omega}=1$，$\omega\overline{\omega}=1$

(iii) $\omega^2=\omega-1=-\overline{\omega}$

といった性質があります。

63 α，β は $x^2+x+1=0$ の解ですから

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

であり，$\alpha^3=\beta^3=1$ が成り立ちます。また，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものは

$$(x-\alpha^n)(x-\beta^n)=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$$

です。

解答・解説

±1 の虚数立方根

60 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を変形すると

$$2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

両辺 2 乗して

$$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3$$

$$4\omega^2 + 4\omega + 4 = 0 \qquad \therefore \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

この両辺に $\omega - 1$ をかけると

$$\omega^3 - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \omega^3 = 1$$

よって

$$\omega^8 = \omega^2 \cdot \omega^6 = \omega^2 \cdot (\omega^3)^2 = \omega^2 = -\omega - 1 \quad (\because \quad ①より)$$

$$= -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}} + \underline{\boldsymbol{\frac{-\sqrt{3}}{2}i}}$$

61 (1) $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つが ω より

$$\omega^3 = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$\omega \neq 1$ より　$\underline{\boldsymbol{\omega^2 + \omega + 1 = 0}}$ $\cdots\cdots$ ②

(2) (1) より $\omega^2 = -\omega - 1$ なので

$$(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) = (2 + 2\omega)(-2\omega) = -4(\omega + \omega^2)$$

$$= -4 \cdot (-1) \qquad (\because \quad ②より)$$

$$= \underline{\mathbf{4}}$$

(3) ①より

$$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$$

$$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega\cdot\omega^3)(1-\omega^2\cdot\omega^3)$$

$$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$$

$$= \{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2 = (1-\omega^2-\omega+\omega^3)^2$$

$$= (2-\omega-\omega^2)^2$$

$$= (2+1)^2 \qquad (\because \quad ②より)$$

$$= \underline{\mathbf{9}}$$

62 $z^3=-1$ の虚数解の 1 つが ω より

$$\omega^3=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \quad (\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

ω は虚数より　$\omega^2-\omega+1=0 \quad \cdots\cdots ②$

①，② を用いると

$$\begin{aligned}&(\omega^2+\omega+1)^6+(\omega^2+\omega-1)^6+(\omega^2-\omega+1)^6\\&\qquad+(\omega^2-\omega-1)^6+(-\omega^2-\omega+1)^6\\&=(\omega+\omega)^6+(\omega^2+\omega^2)^6+0^6+(-1-1)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6 \quad (\because \ ②より)\\&=(2\omega)^6+(2\omega^2)^6+0+(-2)^6+(-2\omega^2)^6\\&=2^6(\omega^6+\omega^{12}+1+\omega^{12})=2^6\{(\omega^3)^2+2(\omega^3)^4+1\}\\&=2^6\{(-1)^2+2\cdot(-1)^4+1\} \quad (\because \ ①より)\\&=2^6\cdot 4=\underline{\mathbf{256}}\end{aligned}$$

63 α，β は $x^2+x+1=0$ の 2 解なので，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\beta=1 \quad \cdots\cdots ①$$

である。また，$x^2+x+1=0$ の両辺に $x-1$ をかけると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore \quad x^3-1=0$$

となるから

$$\boldsymbol{\alpha^3=1,\quad \beta^3=1} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。以上のことより

$n=3k$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k+(\beta^3)^k=1^k+1^k=\underline{\mathbf{2}} \quad (\because \ ②より)$$

$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n&=(\alpha^3)^k\cdot\alpha+(\beta^3)^k\cdot\beta=\alpha+\beta \quad (\because \ ②より)\\&=-1 \quad (\because \ ①より)\end{aligned}$$

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n&=(\alpha^3)^k\cdot\alpha^2+(\beta^3)^k\cdot\beta^2=\alpha^2+\beta^2 \quad (\because \ ②より)\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot 1=-1 \quad (\because \ ①より)\end{aligned}$$

つまり，n が 3 の倍数でないとき，$\alpha^n+\beta^n=\underline{\mathbf{-1}}$ である。また，①より

$$\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1^n=1$$

なので，n が 3 の倍数でないとき，α^n，β^n を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2+x+\underline{\mathbf{1}}=0$$

である。