問題

直線の方程式

71 2 点 $(-1,\ -7)$，$(3,\ 13)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ である。（千葉工業大）

72 3 点 $(-1,\ 2)$，$(-2,\ 3)$，$\left(3,\ \boxed{}\right)$ は同じ直線上にある。（中部大）

73 点 $(2,\ -3)$ を通り，直線 $y = 3x - 5$ に平行な直線は $y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ で，垂直な直線は $y = \boxed{}\,x - \boxed{}$ である。
（玉川大）

74 平面上の直線 l_1 : $(a+4)x + (3a-1)y + 4a - 23 = 0$ が，直線 l_2 : $3x + 4y + 5 = 0$ と平行になるのは $a = \boxed{}$ のときであり，直線 l_1，l_2 が直交するのは $a = \boxed{}$ のときである。（大阪産業大）

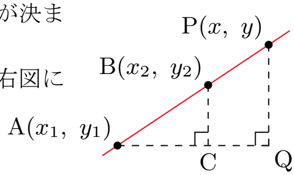
75 3 直線 $x - y = -1$, $3x + 2y = 12$, $kx - y = k - 1$ が，三角形をつくらないような定数 k の値は $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ である。（日本歯科大）

76 $10x^2 + kxy + 2y^2 - 9x - 4y + 2 = 0$ が 2 直線を表す時の k の値を求めよ。ただし，k は整数とする。（自治医科大）

チェック・チェック

直線の方程式

71 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ が与えられると直線が決まります。



$x_1 \neq x_2$ のときは， 直線上の任意の点を P とすると，右図において $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$ なので

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{BC}{AC}$$

すなわち

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (= 傾き)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

$x_1 = x_2$ のときは

$$\boldsymbol{x = x_1}$$

この 2 つの場合をまとめて　$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

と表すこともできます。

72 3 点が同一直線上にあるための条件（**共線条件**）は，2 点を通る直線の傾きを比較するとよいでしょう。

73，**74** 2 直線の平行条件，垂直条件

(I) $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ において

平行条件：$m_1 = m_2$　(2 直線が一致するときも含む)

垂直条件：$m_1m_2 = -1$

(II) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ において

平行条件：$a_1b_2 - b_1a_2 = 0$　(2 直線が一致するときも含む)

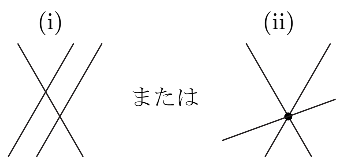
垂直条件：$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

75 3 直線が三角形をつくらないのは

(i) 平行な 2 直線が存在する

(ii) 3 本の直線が 1 点を共有する

の 2 つの場合が考えられます。



76 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ が 2 直線を表すのは

$$(px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$$

と変形されるときです。x，y の 1 次式として因数分解されるための条件を求めます。

解答・解説

直線の方程式

71 2 点 $(-1,\ -7)$，$(3,\ 13)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{13-(-7)}{3-(-1)}=5$$

よって，求める方程式は

$$y-(-7)=5\{x-(-1)\}$$

$$\therefore\quad y=\underline{\mathbf{5}}x-\underline{\mathbf{2}}$$

72 求める点を $(3,\ y)$ とおく。3 点は同一直線上にあるから，**傾きに着目**して

$$\frac{3-2}{-2-(-1)}=\frac{y-2}{3-(-1)}$$

$$-1=\frac{y-2}{4}\qquad\therefore\quad y=\underline{\mathbf{-2}}$$

別解 $(-1,\ 2)$，$(-2,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y=-(x+1)+2\qquad\therefore\quad y=-x+1$$

だから，$x=3$ を代入して　$y=-2$

73 点 $(2,\ -3)$ を通り，直線 $y=3x-5$ に平行な直線は傾きが 3 なので

$$y=3(x-2)-3\qquad\therefore\quad y=\underline{\mathbf{3}}x-\underline{\mathbf{9}}$$

垂直な直線は，傾きが $-\dfrac{1}{3}$ なので

$$y=-\frac{1}{3}(x-2)-3\qquad\therefore\quad y=\underline{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}x-\underline{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}}$$

74 2 直線が**平行**になるのは

$$-\frac{a+4}{3a-1}=-\frac{3}{4}$$

$$4(a+4)=3(3a-1)\qquad\therefore\quad a=\underline{\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{5}}}$$

また，l_1，l_2 が**直交**するのは

$$\left(-\frac{a+4}{3a-1}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$$

$$3(a+4)=-4(3a-1)\qquad\therefore\quad a=\underline{-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}}$$

別解 平行条件，垂直条件の (II) を用いると，それぞれ

平行：$(a+4)\cdot4-(3a-1)\cdot3=0\qquad\therefore\quad a=\dfrac{19}{5}$

垂直：$(a+4)\cdot3+(3a-1)\cdot4=0\qquad\therefore\quad a=-\dfrac{8}{15}$

75 $x-y=-1$　すなわち　$y=x+1$　$\cdots\cdots①$

$3x+2y=12$　すなわち　$y=-\dfrac{3}{2}x+6$　$\cdots\cdots②$

$kx-y=k-1$　すなわち　$y=kx+1-k$　$\cdots\cdots③$

①と②は平行でないので，三角形をつくらないのは次のいずれかの場合である。

(i) ① // ③ のとき，つまり $k=1$ のとき

(ii) ② // ③ のとき，つまり $k=-\dfrac{3}{2}$ のとき

(iii) ①と②の交点を③が通るとき，①，②より

$$x+1=-\frac{3}{2}x+6 \qquad \therefore \quad x=2$$

したがって，①と②の交点は $(2,\ 3)$ であり，③がこの点を通るのは

$$3=2k+1-k \qquad \therefore \quad k=2$$

以上 (i)，(ii)，(iii) より

$$\underline{\boldsymbol{k=-\frac{3}{2},\ 1,\ 2}}$$

76 与式を y の 2 次方程式とみて

$$2y^2+(kx-4)y+(10x^2-9x+2)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{-(kx-4)\pm\sqrt{D_y}}{4} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで

$$\begin{aligned} D_y &= (kx-4)^2-8(10x^2-9x+2) \\ &= (k^2-80)x^2+8(9-k)x \end{aligned}$$

①が 2 直線を表す条件は $\sqrt{D_y}$ が x の 1 次式，または，定数であることだが，D_y は定数でないので，$\sqrt{D_y}$ が x の 1 次式，すなわち D_y が x の完全平方式である。

したがって，$D_y=0$ の判別式を D_x とすると

$$\begin{cases} k^2-80 \fallingdotseq 0 \\ \dfrac{D_x}{4}=16(9-k)^2=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} k \fallingdotseq \pm 4\sqrt{5} \\ k=9 \end{cases}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{k=9}}$$