

問題

3 直線で囲まれる三角形の面積

82 (1) 3直線 $y = x + 1$, $y = -2x + 10$, $y = 0$ によって囲まれる三角形の面積は である。 (千葉工業大)

(2) 3直線 $-4x + y - 4 = 0$, $4x + 3y - 12 = 0$, $4x + 15y - 12 = 0$ で囲まれる三角形の面積は である。 (昭和薬科大)

83 座標平面上の3点 $A(2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(2t+1, 10-t)$ から作る三角形 ABC の面積が 10 である。このとき、 $t = \text{$ または $t = \text{$ である。 (東邦大)

チェック・チェック

3 直線で囲まれる三角形の面積

82 (1) 三角形の面積 $= \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$ です。

(2) 三角形の見方を工夫します。

83 三角形の面積公式として

(I) $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ のとき

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|$$

(II) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ のとき

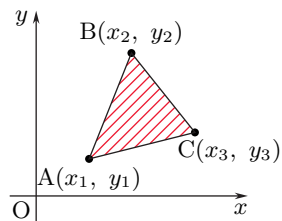
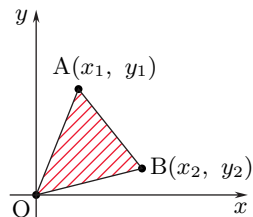
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)|$$

があります。(II) は

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

なので、ベクトルの始点 A を O に平行移動すれば (I) と同じです。



解答・解説

3 直線で囲まれる三角形の面積

82 (1) 3直線を図示すると右図のようになるから、3直線によって囲まれる三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times \{5 - (-1)\} \times 4 = \underline{12}$$

$$(2) \begin{cases} -4x + y - 4 = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4x + 3y - 12 = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 4x + 15y - 12 = 0 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases} \text{とおく。}$$

①と②、②と③、③と①の交点はそれぞれA(0, 4), B(3, 0), C(- $\frac{3}{4}$, 1)であり、D(-1, 0)とおくと、求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle ABD - \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times \{3 - (-1)\} \times 4 - \frac{1}{2} \times \{3 - (-1)\} \times 1 \\ &= 8 - 2 = \underline{6} \end{aligned}$$

別解 ③のy切片をE(0, $\frac{4}{5}$)とおくと

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle ACE + \triangle ABE = \frac{1}{2} AE \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} AE \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + 3\right) = 6 \end{aligned}$$

83 $\triangle ABC$ の面積が10なので

$$\frac{1}{2} |(4-2)(10-t-1) - (7-1)(2t+1-2)| = 10$$

$$\frac{1}{2} |-14t + 24| = 10$$

$$7t - 12 = \pm 10 \quad \therefore \quad t = \underline{\frac{22}{7}}, \underline{\frac{2}{7}}$$

別解 $\triangle ABC$ をx軸方向に-2, y軸方向に-1だけ平行移動した三角形を $A'B'C'$ とすると、 $A'(0, 0)$, $B'(2, 6)$, $C'(2t-1, 9-t)$ である。

$$(\triangle ABC \text{の面積}) = (\triangle A'B'C' \text{の面積})$$

より $\triangle ABC$ の面積が10となるのは

$$\frac{1}{2} |2(9-t) - 6(2t-1)| = 10$$

以下、同じ。

