問題

円の接線

100 直線 $y = ax + b$ が円 $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ の周上の点 $(8,\ 2)$ で接線となるとき，$a =$ □，$b =$ □ である。（北海道薬科大）

101 xy 平面において，中心が点 $(1,\ -1)$ で半径が 1 の円に接し，点 $(5,\ 1)$ を通る直線の方程式は $y =$ □ と $y =$ □ である。（立教大）

102 2 円 $x^2 + y^2 = 2^2$ と $(x-6)^2 + y^2 = 4^2$ に共通な接線の方程式は □，□，□ である。（昭和薬科大）

チェック・チェック

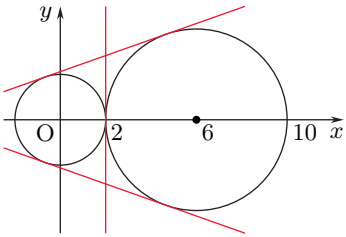
円の接線

100 接線は接点と中心を結んだ線分に垂直です。また，円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

101 円の外部の点から接線を引く問題です。接線は 2 本存在します。

102 一般に 2 つの円に接する直線は**共通内接線**，**共通外接線**が 2 本ずつの合計 4 本があります。本問では 2 円が接しており，共通内接線は 1 本となっています。



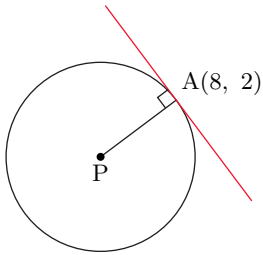
解答・解説

円の接線

100 $x^2+y^2-8x+2y-8=0$ を変形すると

$$(x-4)^2+(y+1)^2=25$$

だから，中心 P(4, −1)，半径 5 の円である。



A(8, 2) に対して，AP の傾きは

$$\frac{2-(-1)}{8-4}=\frac{3}{4}$$

だから接線の傾きは $-\dfrac{4}{3}$ となるので

$$y=-\frac{4}{3}(x-8)+2 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{38}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{38}{3}}$

別解 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 上の点 (8, 2) における接線の方程式は

$$(8-4)(x-4)+(2+1)(y+1)=25 \qquad \therefore \quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{38}{3}$$

101 中心が (1, −1) で半径が 1 の円の接線で，点 (5, 1) を通るものは，y 軸と平行でないから

$$y=m(x-5)+1 \qquad \therefore \quad mx-y-5m+1=0$$

とおける。中心 (1, −1) と直線との距離が円の半径 1 となることから

$$\frac{|m-(-1)-5m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ をかけて，さらに両辺を 2 乗すると

$$(-4m+2)^2=m^2+1$$

$$15m^2-16m+3=0$$

$$\therefore \quad m=\frac{8\pm\sqrt{64-45}}{15}=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}$$

よって，求める直線の方程式は

$$y=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}x-5\cdot\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}+1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}x-\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}} \quad \text{（複号同順）}$$

102 $x^2+y^2=2^2$ は原点 O を中心とした半径 2 の円であり，$(x-6)^2+y^2=4^2$ は A(6，0) を中心とした半径 4 の円である。よって，2 円は点 (2，0) で接し，この点を通り x 軸に垂直な直線は共通な接線の 1 つである。　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=2}}$

また，残りの接線を $y=mx+n$ とおくと，中心から接線までの距離はそれぞれの半径に等しいことから

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \cdots\cdots ①, \qquad \frac{|6m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=4 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$2|n|=|6m+n| \quad \text{すなわち} \quad 2n=\pm(6m+n)$$

$$\therefore \quad n=6m,\ -2m$$

$n=6m$ のとき，①より

$$\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \text{すなわち} \quad 9m^2=m^2+1$$

$$\therefore \quad m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ n=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{（複号同順）}$$

$n=-2m$ のとき，①より

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \text{すなわち} \quad m^2=m^2+1$$

となり，これをみたす m は存在しない。

したがって，残りの接線は　　$\underline{\boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$　**（複号同順）**