問題

軌跡の方程式

112 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ が，$b=a+2$ をみたしながら動くとする。このとき線分 PQ の中点の軌跡の方程式を求め，グラフをえがきなさい。（津田塾大）

113 xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O，A，P が三角形を作るとき，その三角形の重心を G とする。G の軌跡を求めよ。（広島大）

114 2 本の直線

$$mx-y=0 \quad \cdots\cdots ①, \qquad x+my-m-2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点を P とする。m が実数全体を動くとき，P の軌跡は

円 $\left(x-\boxed{}\right)^2+\left(y-\boxed{}\right)^2=\boxed{}$ から

1 点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ を除いたもの

となる。（獨協医科大）

チェック・チェック

軌跡の方程式

112 $b=a+2$ より $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ は $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ の x 座標 a で表され，PQ の中点も a で表すことができます。

113 3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ でつくられる △ABC の**重心 G の座標は** $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ です。

G の座標を $(X,\ Y)$ とおいて，動点 P と G との関係式をつくりましょう。

114 交点 P を m で表す必要はありません。m に対応して交点 P が決まるので，①かつ②をみたす**実数 m が存在するための x，y の条件**を求めればよいのです。

解答・解説

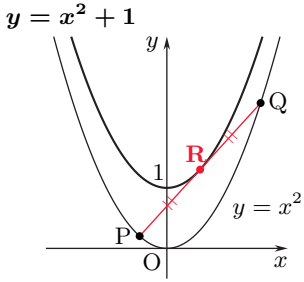
軌跡の方程式

112 線分 PQ の中点を R$(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{a^2+b^2}{2}$$

であり，$b=a+2$ を代入して

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+(a+2)}{2}=a+1 & \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{a^2+(a+2)^2}{2} \\ \quad =a^2+2a+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



①より $a=x-1$ であり，これを②へ代入して

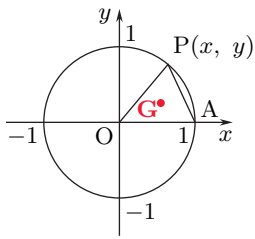
$$y=(x-1)^2+2(x-1)+2 \qquad \therefore\quad y=x^2+1$$

よって，求める軌跡の方程式は $\boldsymbol{y=x^2+1}$ であり，

これを図示すると **右上図** のようになる。

113 P$(x,\ y)$ とし，△OAP の重心 G の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{x+1}{3} \\ Y=\dfrac{y}{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=3X-1 \\ y=3Y \end{cases}$$



ここで，三角形 OAP ができる条件は $y\neq 0$ である。P$(x,\ y)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の点なので

$$(3X-1)^2+(3Y)^2=1 \text{ かつ } 3Y\neq 0$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{3}\right)^2+Y^2=\frac{1}{9} \text{ かつ } Y\neq 0$$

したがって，求める軌跡は **円 $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ から，原点 $(0,\ 0)$ と点 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ を除いた図形** である。

114 ①かつ②をみたす実数 m が存在するための x，y の条件を求める。

(i) $x=0$ のとき，①より　$y=0$

(ii) $x \neq 0$ のとき，①より　$mx-y=0$　$\therefore\ m=\dfrac{y}{x}$ …… ③

②に③を代入して

$$x+\frac{y}{x}\cdot y-\frac{y}{x}-2=0$$

$$x^2+y^2-y-2x=0$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$x \neq 0$ より $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ は除く。

(i)，(ii) より，求める軌跡は

円 $(x-\underline{\mathbf{1}})^2+\left(y-\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\right)^2=\underline{\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}}$ から 1 点 $(\underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{1}})$ を除いたもの