問題

パラメータで表示された点の軌跡

115 t を媒介変数とする。方程式

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 4 \end{cases}$$

より，x と y の方程式を求めよ。（高崎経済大）

116 放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = m(x-1)$ は相異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

（北海学園大）

117 直線 $y = ax$ が放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ に異なる 2 点 P，Q で交わるとき，点 P, Q と点 R(1, 0) の作る三角形の重心を G とする。a を動かしたときの G の軌跡を求めよ。（日本女子大）

118 実数 x，y が $x^2 + y^2 = 1$ という関係をみたしながら動くとき，点 $\mathrm{P}(x+y,\ xy)$ の軌跡を求め，図示せよ。（名古屋市立大）

チェック・チェック

パラメータで表示された点の軌跡

115 パラメータ（媒介変数）t を消去します。

116 放物線と直線の方程式を連立し

$$x^2 = m(x-1)$$

の 2 実解を α，β とすると，中点 $(x,\ y)$ は

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

となります。ここで，中点 $(x,\ y)$ は直線 $y = m(x-1)$ 上の点でもあるので，x 座標が決まれば y 座標は $y = m(x-1)$ として決めることもできます。

一般に，パラメータ m を含む 2 つの方程式 $f(x,\ y,\ m) = 0$，$g(x,\ y,\ m) = 0$ をみたす点の軌跡を求めるということは

$$(*)\begin{cases} f(x,\ y,\ m) = 0 \\ g(x,\ y,\ m) = 0 \end{cases}$$

をみたす x，y の条件式を求めるということです。もう少し具体的にいうと，パラメータ m の値を与えることにより，$(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ が対応するわけですから，**$(*)$ をみたす実数 m が存在するための x，y の条件**を求めるということになります。

117 内容は **116** と同じですが，式がだんだん複雑になってきます。

118 $\begin{cases} X = x+y \\ Y = xy \end{cases}$ とおくと，$x^2+y^2 = 1$ は X，Y で表すことができます。また，x，y は $t^2 - Xt + Y = 0$ の解です。x，y が実数であるための条件を，X，Y で表すことを忘れないでください。

解答・解説

パラメータで表示された点の軌跡

115 $\begin{cases} x = 3t + 1 & \cdots\cdots ① \\ y = -2t + 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より $\boldsymbol{t = \dfrac{x-1}{3}}$ であるから，これを②へ代入して

$$y = -2 \cdot \frac{x-1}{3} + 4 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}}$$

116 (1) C： $y = x^2$，l： $y = m(x-1)$ より，交点の x 座標は

$$x^2 = m(x-1) \qquad \therefore \quad x^2 - mx + m = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解であり，異なる 2 点で交わることから，判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4m = m(m-4) > 0$$

よって，求める m の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{m < 0, \quad 4 < m}}$$

(2) 交点 A，B の x 座標を α，β とおくと，①の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m$$

よって，線分 AB の中点の x 座標は

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{m}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

②から $m = 2x$ であり，$y = m(x-1)$ に代入すると

$$y = 2x(x-1)$$

また，(1) より

$$2x < 0,\ 2x > 4 \qquad \therefore \quad x < 0,\ 2 < x$$

よって，求める軌跡は

<u>**放物線 $\boldsymbol{y = 2x(x-1)}$ の $\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x}$ をみたす部分**</u>

117 $y = ax$ と $y = x^2 - 2x + 2$ を連立して

$$x^2 - (a+2)x + 2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

異なる 2 点で交わるための条件は，判別式を D とすると

$$D = (a+2)^2 - 8 = a^2 + 4a - 4 > 0$$

$$a < -2 - 2\sqrt{2},\ a > -2 + 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$$

②の下で①の 2 解を α，β $(\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = a + 2 \quad \cdots\cdots ③$$

また，P，Q は $y = ax$ 上の点なので，$\mathrm{P}(\alpha,\ a\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ a\beta)$ と表せる。△PQR の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とおくと，③より

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta+1}{3} = \dfrac{a+3}{3} & \cdots\cdots④ \\ y = \dfrac{a\alpha+a\beta}{3} = \dfrac{a(\alpha+\beta)}{3} = \dfrac{a(a+2)}{3} & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

②，④，⑤を同時にみたす **a が存在するための x，y の条件**を求める。

④より $a=3x-3$ であり，⑤へ代入して

$$y = \frac{(3x-3)(3x-3+2)}{3} = (x-1)(3x-1)$$

さらに②より

$$3x-3 < -2-2\sqrt{2},\quad 3x-3 > -2+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x < \frac{1-2\sqrt{2}}{3},\quad x > \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，求める G の軌跡は

放物線 $y=(x-1)(3x-1)$ の $x < \dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}$，$x > \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ をみたす部分

118 P$(X,\ Y)$ とおくと，$\begin{cases} X = x+y \\ Y = xy \end{cases}$ なので，**x，y は $t^2-Xt+Y=0$ の実数解**である。

したがって，判別式を D とすると，x，y が実数より

$$D = X^2-4Y \geqq 0$$

$$\therefore\quad Y \leqq \frac{1}{4}X^2$$

さらに，$x^2+y^2=1$ より

$$(x+y)^2-2xy=1$$

であるから

$$X^2-2Y=1 \qquad \therefore\quad Y=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}$$

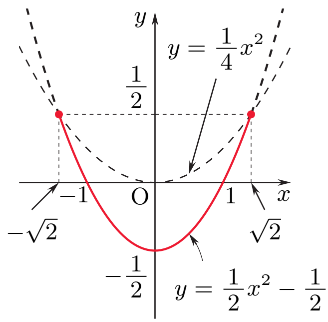
以上より，P の軌跡は，放物線

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\quad かつ\quad y \leqq \frac{1}{4}x^2$$

すなわち

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ の

$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ をみたす部分



であり，図示すると **右図の実線部分** となる。