

問題

不等式で表された領域

119 次の連立不等式が表す領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{専修大})$$

120 不等式 $(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1)(x - y + 1) \leq 0$ の表す領域を図示せよ。
(東京芸工大)

121 次の不等式が表す領域を図示せよ。

(1) $|x| - |y| > 0$ (津田塾大 改)

(2) $|x| + |2y| \leq 2$ (北見工業大)

チェック・チェック

不等式で表された領域

119 不等式で表された領域とは、不等式をみたす点 (x, y) の集合のことです。

- $y > f(x)$ ($y < f(x)$) は、 $y = f(x)$ のグラフの上側 (下側)
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ ($< r^2$) は、
円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の外部 (内部)

を表します。

120 $AB \leq 0 \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ です。

121 (1) 絶対値記号を含む不等式です。中身の符号で場合分けすると4つの場合分けが必要となります。

$$|x| - |y| > 0 \iff |y| < |x| \iff y^2 < x^2$$

として絶対値記号をはずすこともできますね。

あるいは、**式の対称性**に目をむけるのもよい方法です。

(2) 式の対称性に注目しましょう。

解答・解説

不等式で表された領域

$$\text{119 } x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

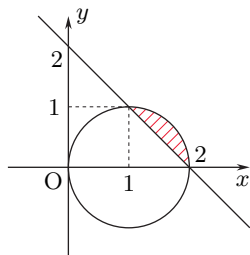
より、中心 $(1, 0)$ 、半径 1 の円の周および内部であり

$$x + y - 2 \geq 0 \quad \therefore y \geq -x + 2$$

より、直線 $y = -x + 2$ の上側である。よって、領域は右図の斜線部分となる。ただし、境界を含む。

したがって、求める面積は半径 1 の四分円から 3 辺が $1, 1, \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形を除けばよいので

$$\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

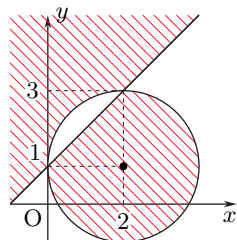


$$\text{120 } (x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1)(x - y + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 4 \\ y \geq x+1 \end{cases}$$

$$\text{または} \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ y \leq x+1 \end{cases}$$

であり、右図の斜線部分。ただし、境界を含む。



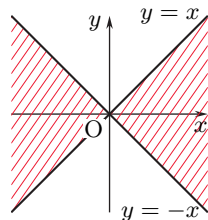
121 (1) $|x| - |y| > 0$ より $|y| < |x|$ であるから、両辺を 2 乗して

$$y^2 < x^2 \quad \therefore (y+x)(y-x) < 0$$

すなわち

$$\begin{cases} y > -x \\ y < x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y < -x \\ y > x \end{cases}$$

よって、求める領域は、右図の斜線部分。ただし、境界は含まない。



別解 $|y| < |x|$ は x 軸、 y 軸に関して対称な領域だから、 $x > 0$ かつ $y > 0$ のときの領域を図示して、 x 軸および y 軸に関して対称移動させると同じ領域を得る。

(2) $|x| + |2y| \leq 2$ は x 軸および y 軸に関して対称な領域である。

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のときの領域は

$$x + 2y \leq 2$$

の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分であるから、これを x 軸に関して、さらに y 軸に関して対称移動させればよいので、求める領域は 右図の斜線部分。ただし、境界を含む。

