問題

通過領域

122 xy 平面上の 2 点 $(t,\ t)$，$(t-1,\ 1-t)$ を通る直線を l_t とする。次の問いに答えよ。

(1) l_t の方程式を求めよ。

(2) t がすべての実数を動くとき，l_t の通り得る範囲を図示せよ。

（京都産業大）

123 実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。

（神戸大）

チェック・チェック

通過領域

122 直線 $l_t : f(x,\ y,\ t) = 0$ の通り得る範囲を求めるということは，通り得る範囲を表す x，y の不等式を求めることです。

パラメータ t が 1 つ与えられると直線が 1 本に決まり，その直線上の点が求める領域内の点ということになります。すなわち，**$f(x,\ y,\ t) = 0$ をみたす実数 t が存在するための x，y の条件**を求めればよいわけです。パラメータ表示された点の軌跡を求めるときの考え方と同じですね。

123 (2) **122** と同じように考えればよいのですが，パラメータ t に $|t| \geqq 1$ という条件がついていることに注意しましょう。t の 2 次方程式についての**解の配置**の問題となります。

あるいは，直線 l_t は (1) で求めた軌跡の接線になっていることに気づくと直接領域を図示することもできます。(1) の軌跡はパラメータ t を動かしてできる直線群の**包絡線**とよばれています。

解答・解説

通過領域

122 (1) 求める直線 l_t の方程式は

$$y=\frac{t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t)+t \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=(2t-1)x-2t^2+2t}$$

(2) (1) を t について整理すると

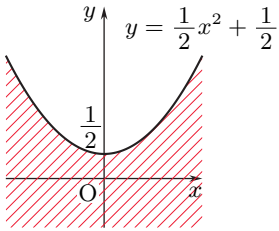
$$2t^2-2(x+1)t+x+y=0$$

これが**実数解 t をもつための x，y の条件**を求めればよいから，判別式 $\geqq 0$ より

$$(x+1)^2-2(x+y)\geqq 0$$

$$\therefore \quad y\leqq \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

したがって，l_t の通過する領域は，
右図の斜線部分で，境界を含む。



123 l_t の方程式を t について整理すると

$$t^2-2xt+y=0$$

$f(t)=t^2-2xt+y$ とおく。

(1) $f(t)=0$ がただ 1 つの実数解をもつための x，y の条件を求めればよいから，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=x^2-y=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=x^2}$$

(2) $f(t)=0$ が $|t|\geqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつための x，y の条件を求めればよい。

軸 $t=x$ の位置で場合分けする。

(i) $x\leqq -1$ または $1\leqq x$ のとき

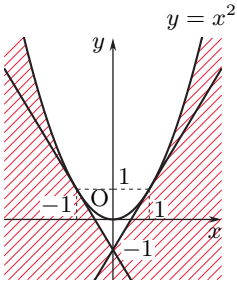
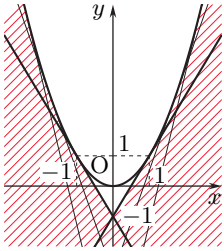
$$D\geqq 0 \qquad \therefore \quad y\leqq x^2$$

(ii) $-1<x<1$ のとき

$$f(-1)\leqq 0 \text{ または } f(1)\leqq 0$$

$$\therefore \quad y\leqq -2x-1 \text{ または } y\leqq 2x-1$$

(i) または (ii) を図示すると **右上図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。**



別解 (1) より l_t は放物線 $y=x^2$ の接線であるから，$|t|\geqq 1$ の範囲で接線を引くことにより，l_t の通過領域は右図の斜線部分である。ただし，境界を含む。