問題

領域における最大・最小

124 x，y が 3 つの不等式 $x \leqq 2$，$x+2y-8 \leqq 0$，$2x+y-4 \geqq 0$ をみたすとき，$x+y$ のとる値の最大値，最小値を求めよ。（大阪工業大）

125 (1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。

$$|x| \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+3$$

(2) 領域 D の点 $(x,\ y)$ について $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。

（北海道大）

126 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-1 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，
x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。（熊本大）

127 二種類の食品 A，B の 100g 当たりの栄養素含有量は下表の通りである。

	糖　質	蛋白質	脂　質
A	20g	5g	3g
B	10g	10g	3g

食品 A と B を組み合わせて糖質を 40g 以上，蛋白質を 20g 以上とる必要がある。一方，脂質摂取量は最小に押さえたい。このような条件下で脂質は何グラムとることになるか。（自治医科大）

チェック・チェック

領域における最大・最小

124 まずは，3 つの不等式で表された領域を図示します。この領域を D としましょう。$x+y$ の値が k である，ということは

$x+y=k$ をみたす点 $(x,\ y)$ が D に存在する

ということです。すなわち

直線 $x+y=k$ と領域 D が共有点をもつ

ということです。傾き -1 の直線 $y=-x+k$ を D と共有点をもつように動かして y 切片 k の最大・最小を調べればよいわけです。

125 $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=m$ とおくと，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ であり，m は点 $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線の傾きを表します。(1) の**領域 D とこの直線とが共有点をもつための m の条件**を考えます。

126 $x^2+y^2-4y=k$ とおくと $x^2+(y-2)^2=k+4$ であり，$k+4>0$ のとき，$\sqrt{k+4}$ は中心 $(0,\ 2)$ の円の半径です。

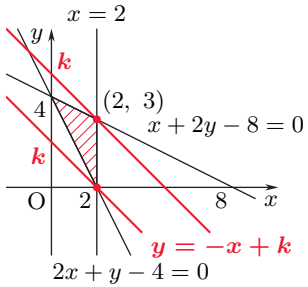
127 A，B をそれぞれ x g，y g とったとして，与えられた条件を式で表してみましょう。このときの脂質摂取量は $\dfrac{3}{100}x+\dfrac{3}{100}y$ です。

解答・解説

領域における最大・最小

124　$x \leqq 2,\quad x+2y-8 \leqq 0,\quad 2x+y-4 \geqq 0$

$$\therefore\quad x \leqq 2,\quad y \leqq -\frac{1}{2}x+4,\quad y \geqq -2x+4$$



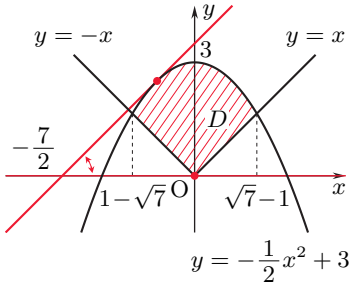
領域は右図の斜線部分で，境界を含む。
$x+y=k$（k は実数）とおくと，$y=-x+k$ となり，傾き -1 の直線を表す。

この直線の y 切片 k の値が最大となるのは点 $(2,\ 3)$ を通るときであり，また，最小となるのは点 $(2,\ 0)$ を通るときである。よって

最大値：5，**最小値：2**

125　(1)　$y=|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ より，

D は **右の斜線部分となる。ただし境界線を含む。**



(2)　$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}=m$ とおくと

$$y=m\left(x+\frac{7}{2}\right)\qquad \left(x \neq -\frac{7}{2}\right)$$

なので，**m は点 $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線の傾き**を表す。この直線が **D と共有点をもつ**ときの m の範囲を求めればよい。

まず，直線が $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ と接するのは

$$m\left(x+\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+3 \qquad \therefore\quad x^2+2mx+(7m-6)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が重解をもつときであるので

$$\frac{D}{4}=m^2-(7m-6)=(m-1)(m-6)=0 \qquad \therefore\quad m=1,\ 6$$

このとき，①の解は $x=-m$ であり，接点が D 内にあるのは

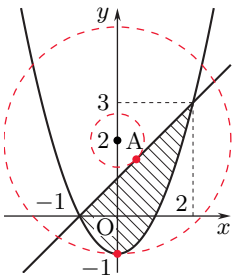
$$1-\sqrt{7} \leqq -m \leqq \sqrt{7}-1 \qquad \therefore\quad 1-\sqrt{7} \leqq m \leqq \sqrt{7}-1$$

よって，$m=1$ のとき m は最大となる。

また，$(0,\ 0)$ を通るとき m は最小で $m=0$ となる。

以上より　$\underline{\mathbf{0} \leqq \dfrac{y}{x+\frac{7}{2}} \leqq \mathbf{1}}$

126 連立不等式の表す領域を D とすると，D は図の斜線部分となる。ただし，境界を含む。



$x^2+y^2-4y=k$ とおくと

$$x^2+(y-2)^2=k+4$$

点 $(0,\ 2)$ は D の外部にあるから，$x^2+(y-2)^2>0$ であり，これは中心 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，半径 $\sqrt{k+4}$ の円を表す。**この円と D が共有点をもつ**ときの k の範囲を調べる。

A と $x-y+1=0$ の距離は $\dfrac{|0-2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので，k が最小となるのは

$$\sqrt{k+4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$$

次に $y=x^2-1$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ として

$$\mathrm{AP}^2=t^2+(t^2-3)^2=t^4-5t^2+9=\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\ (0\leqq t^2\leqq 4)$$

より，AP は $t=0$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{25}{4}+\dfrac{11}{4}}=3$ をとる。このときの AP が最大となる場合の半径なので　$\sqrt{k+4}=3$　$\therefore\quad k=9-4=5$

以上より **最大値 5，最小値 $-\dfrac{7}{2}$** である。

127 A を x g，B を y g とるとすると，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　……①

である。また，糖質については

$$x\times 0.2+y\times 0.1\geqq 40 \qquad \therefore\quad y\geqq -2x+400 \quad \cdots\cdots②$$

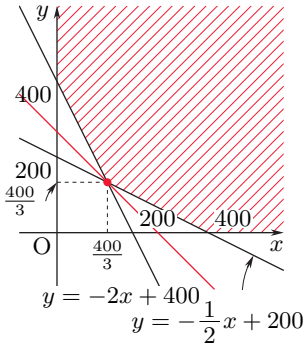
蛋白質については

$$x\times 0.05+y\times 0.1\geqq 20 \qquad \therefore\quad y\geqq -\frac{1}{2}x+200 \quad \cdots\cdots③$$

さらに，このときの脂質を k g とすると

$$k=0.03x+0.03y \qquad \therefore\quad y=-x+\frac{100}{3}k \quad \cdots\cdots④$$

①，②，③の表す領域を D として，D の下で④をみたす k の最小値を求めればよい。



④は傾き -1，y 切片 $\dfrac{100}{3}k$ の直線を表すので，**D と共有点をもつときの k の最小値**は④が $\left(\dfrac{400}{3},\ \dfrac{400}{3}\right)$ を通るときである。よって，このとき

$$k=0.03\times\frac{400}{3}+0.03\times\frac{400}{3}$$
$$=4+4=\underline{\mathbf{8}\ (\text{グラム})}$$