

問題

sin, cos を tan で表す

141 $\cos 2\theta$ を $\tan \theta$ で表すと となる。また, $\sin 2\theta$ を $\tan \theta$ で表すと となる。
(長岡技術科学大)

142 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos \theta =$, $\tan \theta =$, $\tan 2\theta =$
である。
(西南学院大)

チェック・チェック

sin, cos を tan で表す

141 $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ を $\tan \theta$ で表す問題です。cos と tan には

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

という関係があります。

142 $\cos \theta$, $\tan \theta$ を $\tan \frac{\theta}{2}$ で表す問題です。

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ のとき}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

ですが, これは導き出せるようにしておきましょう。

三角関数を t の有理式に直す 大切な置き換えです。

解答・解説

sin, cos を tan で表す

$$\text{141} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \text{ であるから}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta \\ &= 2 \cdot \tan \theta \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\text{142} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

また

$$\tan \theta = \tan \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}$$