問題

半角の公式

143 (1) $\sin^2 \dfrac{5}{24}\pi = \boxed{}$。　（小樽商科大）

(2) $\sin \dfrac{3}{8}\pi$ の値を求めよ。　（山形大）

144 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$ のとき，$\sin\theta = \boxed{}$，

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \boxed{}$，$\cos\dfrac{\theta}{2} = \boxed{}$ である。　（東海大）

145 角 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$，$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ を満たすとき，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値は $\boxed{}$ である。　（産業医科大）

チェック・チェック

半角の公式

143，**144** 半角の公式は「次数下げ」をするときに用いられます。

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2},\quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

145 $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用います。

解答・解説

半角の公式

143 (1) 半角の公式を用いると

$$\sin^2\frac{5}{24}\pi=\frac{1-\cos\frac{5}{12}\pi}{2}$$

である。

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

なので

$$\sin^2\frac{5}{24}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}}$$

(2) $$\sin^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

であり，$\sin\frac{3}{8}\pi>0$ より　$\underline{\boldsymbol{\sin\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}$

144 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ より　$\sin\theta<0$

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\underline{\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

$\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$ より $\sin\frac{\theta}{2}>0$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$ である。

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\quad\sin\frac{\theta}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\boldsymbol{\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad\cos\frac{\theta}{2}=\underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{3}}}$$

145 $\tan\theta=\frac{4}{3}$ より　$1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$　$\therefore\quad\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ より　$\cos\theta=\frac{3}{5}$

よって　$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ より，$\tan\frac{\theta}{2}\geqq0$ なので　$\underline{\boldsymbol{\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}}}$