問題

不等式（合成・半角）

164 $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，次の不等式を解け。

$\sqrt{2} < \sqrt{3}\sin x - \cos x < \sqrt{3}$　　（九州芸術工科大）

165 $\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta \geqq 0$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ をみたす θ の範囲を求めよ。　　（東京水産大）

166 $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。x の方程式

$x^2\sin\theta + 2x\cos\theta + \sin\theta + 1 = 0$

が実数解をもつような θ の範囲は，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\square}{\square}\pi$，$\dfrac{\square}{\square}\pi \leqq \theta < 2\pi$ である。　　（摂南大）

チェック・チェック

不等式（合成・半角）

164 合成して，x をまとめます。角の範囲に注意しましょう。

165 因数分解を考えます。左辺を $\cos\theta$ または $\sin\theta$ についての 2 次式ととらえるとよいでしょう。因数分解のあとは，合成の公式です。

166 x の 2 次方程式が実数解をもつための条件は

（判別式）$\geqq 0$

です。あとは，得られた三角不等式を解きます。

解答・解説

不等式（合成・半角）

164　$\sqrt{3}\sin x - \cos x$

$= 2\left(\sin x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \cdot \dfrac{1}{2}\right)$

$= 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

より，与式は

$\sqrt{2} < 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}$

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

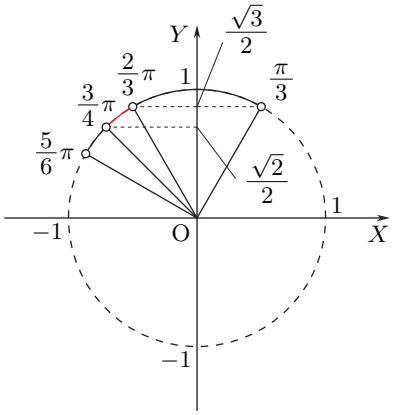
$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ より

$\dfrac{\pi}{3} < x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi$

よって，求める x の範囲は

$\dfrac{2}{3}\pi < x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{11}{12}\pi}$



165　$\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta \geqq 0$

$(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta - 2) \geqq 0$

ここで

$\cos\theta + \sin\theta - 2 = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$

$\leqq \sqrt{2} - 2 < 0$

より

$\cos\theta - \sin\theta \leqq 0$

$\therefore \quad \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq 0$

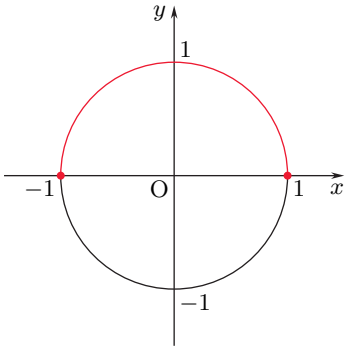
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{7}{4}\pi$

よって，求める θ の範囲は

$0 \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$

$\therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi}$

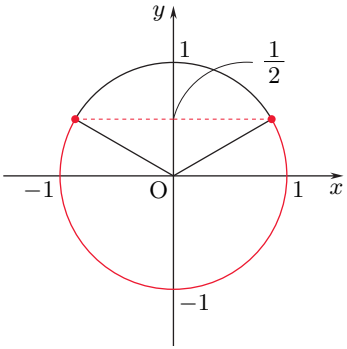


166 x の方程式 $x^2\sin\theta+2x\cos\theta+\sin\theta+1=0$ の判別式を D とすると，実数解をもつ条件は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\cos^2\theta-\sin\theta(\sin\theta+1)\\&=(1-\sin^2\theta)-\sin\theta(\sin\theta+1)\\&=(-2\sin\theta+1)(\sin\theta+1)\\&\geqq 0\end{aligned}$$

である。よって

$$-1\leqq\sin\theta\leqq\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$0\leqq\theta\leqq\underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}}}\pi,\ \underline{\boldsymbol{\frac{5}{6}}}\pi\leqq\theta<2\pi$$