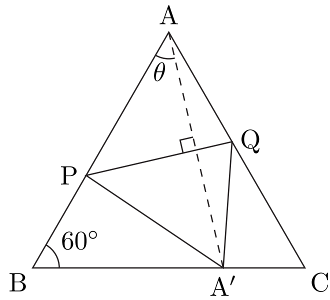
問題

図形への応用

177 図のように，一辺の長さが 2 の正三角形 ABC を頂点 A が対辺 BC 上の点 A′ となるように，辺 AB 上の点 P と辺 AC 上の点 Q を折り目の端にして折り曲げる。$\angle \mathrm{BAA'} = \theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ)$ として次の問いに答えよ。



(1) $\angle \mathrm{AA'B}$ を θ を用いて表せ。

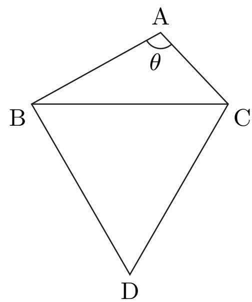
(2) 線分 AA′ の長さを θ の式で表せ。

(3) 線分 AP の長さを θ の式で表せ。

(4) 線分 AP の長さの最小値と，最小値を与える θ の値を求めよ。

（東邦大）

178 三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{AC} = b$ とする。辺 BC を一辺とする正三角形 BDC を，三角形 ABC の反対側につくるとき，以下の設問に答えよ。



(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ として，三角形 ABC の面積 S_1 を a，b，θ を用いて表せ。

(2) 正三角形 BDC の面積 S_2 を a，b，θ を用いて表せ。

(3) 四角形 ABDC の面積 S の最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

（日本歯科大）

179 長さ l の線分 AB を直径とする半円周の弧の上を点 P が動くとする。$\mathrm{AP} + \sqrt{3}\mathrm{PB}$ が最大となるときの $\angle \mathrm{PAB}$ の大きさは $\boxed{}$ であり，最大値は $\boxed{}$ である。

（武蔵大）

チェック・チェック

図形への応用

177 (1) 親切な誘導ですね。

(2) $\triangle \mathrm{AA'B}$ において正弦定理を考えます。

(3) $\triangle \mathrm{APA'}$ において正弦定理を考えます。

(4) (3) で準備が整っています。変数 θ が 1 か所にまとまるように式を変形しましょう。

178 (1) 三角形の面積の公式そのものですね。

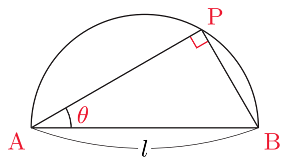
(2) BC の長さは，$\triangle \mathrm{ABC}$ において余弦定理を用います。

(3) S は (1)，(2) より $\sin\theta$，$\cos\theta$ の 1 次式となります。

179 直径 AB に対する円周角 $\angle \mathrm{APB}$ は $\dfrac{\pi}{2}$ なので

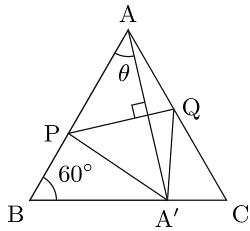
$\triangle \mathrm{APB}$ は直角三角形です。

　$\angle \mathrm{PAB} = \theta$ とおけば，AP，PB は l と θ で表すことができます。あとは，変数 θ が 1 か所にまとまるように式を変形します。



解答・解説

図形への応用



177 (1) 三角形の内角の和は 180° だから，$\triangle \mathrm{AA'B}$ において

$$60^\circ + \theta + \angle \mathrm{AA'B} = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{\angle \mathrm{AA'B} = 120^\circ - \theta}}$$

(2) $\triangle \mathrm{AA'B}$ において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\sin \angle \mathrm{ABA'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin \angle \mathrm{AA'B}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AA'} = \sin 60^\circ \cdot \frac{2}{\sin(120^\circ - \theta)} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}}}$$

(3) $\triangle \mathrm{APA'}$ は $\mathrm{AP} = \mathrm{A'P}$ の二等辺三角形であり，$\angle \mathrm{AA'P} = \theta$，$\angle \mathrm{APA'} = 180^\circ - 2\theta$ であるから，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\sin \angle \mathrm{APA'}} = \frac{\mathrm{AP}}{\sin \angle \mathrm{AA'P}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AP} = \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin(180^\circ - 2\theta)} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2\cos\theta} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta} = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)}}}$$

(4) (3) の分母が最大となるとき，AP の長さは最小となる。

$$\cos\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= (\sin 2\theta \cos 60^\circ + \cos 2\theta \sin 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin(2\theta + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$ より，$0^\circ \leqq 2\theta \leqq 120^\circ$ すなわち $60^\circ \leqq 2\theta + 60^\circ \leqq 180^\circ$ であるから

$$0 \leqq \sin(2\theta + 60^\circ) \leqq 1$$

よって

$$\mathrm{AP} = \frac{\sqrt{3}}{\sin(2\theta + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} - 6$$

となり，AP の最小値は $\underline{\boldsymbol{4\sqrt{3} - 6}}$ であり，このときの θ は

$$\sin(2\theta + 60^\circ) = 1$$

より

$$2\theta + 60^\circ = 90^\circ \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\theta = 15^\circ}}$$

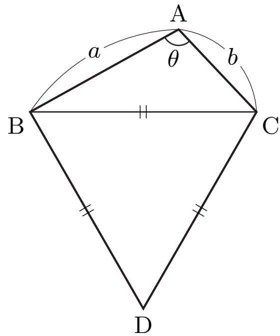
178 (1) $\underline{\boldsymbol{S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\theta}}$

(2) $\mathrm{BC} = c$ とおく。$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いると

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

さらに，$\triangle\mathrm{BCD}$ は正三角形なので

$$S_2 = \frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}}$$



(3) $$S = S_1 + S_2$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$
$$= ab\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$
$$= ab\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$
$$= ab\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$

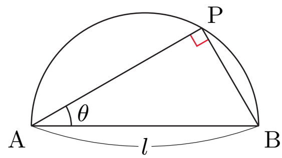
$0 < \theta < \pi$ より $-\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$ だから，S は

$\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\underline{\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi}}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{ab + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)}}$

をとる。

179 $\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とおくと，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

円周角の定理より $\boldsymbol{\angle\mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}}$ だから，



$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AP}}{l} \qquad \therefore\quad \mathrm{AP} = l\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PB}}{l} \qquad \therefore\quad \mathrm{PB} = l\sin\theta$$

したがって

$$\mathrm{AP} + \sqrt{3}\mathrm{PB} = l(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 2l\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2l\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi$ だから

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \angle\mathrm{PAB} = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{2l}}$

をとる。