

問題

式の値（対称式）

184 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ のとき、 $a + a^{-1} = \square$ であり、

$a - a^{-1} = \pm \square \sqrt{\square}$ である。 (明治大)

185 $a > 0, x > 0$ が $a^x + a^{-x} = 5$ をみたしているとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) $a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}$ の値を求めよ。

(2) $a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}$ の値を求めよ。 (弘前大)

チェック・チェック

式の値（対称式）

184 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ の両辺を 2 乗すると、 $a + a^{-1}$ が現れます。

185 $a^x + a^{-x}, a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}$ は $a^{\frac{1}{2}x}, a^{-\frac{1}{2}x}$ についての対称式ですから

基本対称式 $a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}, a^{\frac{1}{2}x} \cdot a^{-\frac{1}{2}x} (= a^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x} = a^0 = 1)$

で表すことができます。

解答・解説

式の値（対称式）

184 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ の両辺を **2乗** すると

$$a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} = 9$$

$$a + 2 \cdot 1 + a^{-1} = 9 \quad \therefore a + a^{-1} = \underline{7}$$

次に

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4a \cdot a^{-1} = 7^2 - 4 = 45$$

$$\therefore a - a^{-1} = \pm\sqrt{45} = \underline{\pm 3\sqrt{5}}$$

185 (1) $a^x + a^{-x} = 5$ より

$$\left(a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = a^x + 2a^{\frac{1}{2}x} \cdot a^{-\frac{1}{2}x} + a^{-x} = 5 + 2 = 7$$

$a > 0$ より, $a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x} > 0$ だから $a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\sqrt{7}}$

$$\begin{aligned} (2) \quad a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x} &= \left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3 \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}\right) \left(a^x - a^{\frac{1}{2}x} \cdot a^{-\frac{1}{2}x} + a^{-x}\right) \\ &= \sqrt{7}(5 - 1) = \underline{4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x} &= \left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3 \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3 - 3a^{\frac{1}{2}x} \cdot a^{-\frac{1}{2}x} \left(a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}\right) \\ &= (\sqrt{7})^3 - 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{7} = 4\sqrt{7} \end{aligned}$$