問題

指数不等式

195 (1) $16 < 4^{x-1} < 8 \cdot 2^x$ を満たす x の範囲は $\boxed{} < x < \boxed{}$ である。 （東北工業大）

(2) 不等式 $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$ の解は $\boxed{}$ である。 （昭和薬科大）

(3) $8^{x+1} + 15 \cdot 4^x - 2^{x+1} \geqq 0$ をみたす実数 x の範囲を求めよ。

（東京水産大）

196 (1) 不等式 $2^{3-\frac{x}{4}} + 7 \times 2^{-\frac{x}{8}} - 1 < 0$ を解け。 （釧路公立大）

(2) 不等式 $\dfrac{1}{4^x} - \dfrac{1}{2^x} - 2 > 0$ をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。

（愛知工業大）

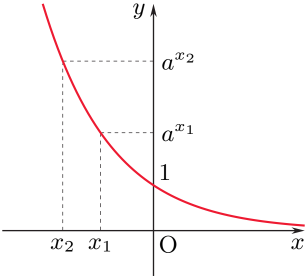
197 $a > 0$, $a \neq 1$ のとき，不等式 $a^{2x-1} - a^{x+2} - a^{x-3} + 1 \leqq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。 （富山大）

チェック・チェック

指数不等式

指数関数 $y=a^x$ のグラフをかくと指数不等式は次のようになります。

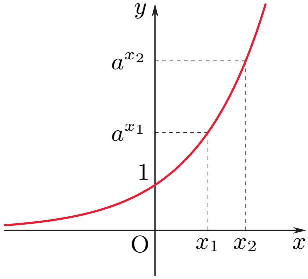
(i) $0<a<1$ のとき



であるから

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2$$

(ii) $a>1$ のとき



であるから

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$$

195 (1) $a>1$ のとき，$a^X < a^Y \iff X<Y$ です。

(2) $3^x=t\ (>0)$ とおけば，与式は t についての 2 次不等式です。

(3) $2^x=t\ (>0)$ とおくと，与式は t についての 3 次不等式になりますね。$t>0$ の条件が強く効いてきます。

196 (1) $2^{-\frac{x}{8}}=t\ (>0)$ とおいてみましょう。

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (>0)$ とおきます。

$0<a<1$ のとき，$a^X < a^Y \iff X>Y$ となることに注意しましょう。

197 $a^x=t\ (>0)$ とおきますが，t の 2 次不等式を解く際に端点の大小比較が必要です。

解答・解説

指数不等式

195 (1) $16=2^4$, $4^{x-1}=(2^2)^{x-1}=2^{2(x-1)}$, $8\cdot 2^x=2^3\cdot 2^x=2^{x+3}$ より

$$2^4<2^{2(x-1)}<2^{x+3}$$

底 2 は 1 より大きいので $4<2(x-1)<x+3$

よって

$$4<2(x-1) \qquad \therefore \quad x>3$$
$$2(x-1)<x+3 \qquad \therefore \quad x<5$$

したがって $\underline{\boldsymbol{3<x<5}}$

(2) $\boldsymbol{3^x=t}$ $(t>0)$ とおくと

$$3^{2x}-12\cdot 3^x+27<0$$
$$t^2-12t+27<0$$
$$(t-9)(t-3)<0 \qquad \therefore \quad 3<t<9$$

したがって

$$3<3^x<3^2 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{1<x<2}}$$

(3) $\boldsymbol{2^x=t}$ $(t>0)$ とおくと

$$8^{x+1}+15\cdot 4^x-2^{x+1}\geqq 0$$
$$8\cdot 2^{3x}+15\cdot 2^{2x}-2\cdot 2^x\geqq 0$$
$$8t^3+15t^2-2t\geqq 0 \qquad \therefore \quad t(t+2)(8t-1)\geqq 0$$

$t>0$ より $\boldsymbol{t(t+2)>0}$ **だから**

$$8t-1\geqq 0 \qquad \therefore \quad t\geqq \frac{1}{8}$$

したがって

$$2^x\geqq \frac{1}{8}=2^{-3} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x\geqq -3}}$$

196 (1) $\boldsymbol{2^{-\frac{x}{8}}=t}$ $(t>0)$ とおくと

$$2^{3-\frac{x}{4}}+7\times 2^{-\frac{x}{8}}-1<0$$
$$8\cdot\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2+7\cdot 2^{-\frac{x}{8}}-1<0$$
$$8t^2+7t-1<0 \qquad \therefore \quad (8t-1)(t+1)<0$$

$t>0$ より

$$\boldsymbol{0<t<\frac{1}{8}}$$

したがって

$$0<2^{-\frac{x}{8}}<2^{-3} \qquad \therefore \quad -\frac{x}{8}<-3 \quad \text{すなわち} \quad \underline{\boldsymbol{x>24}}$$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = t$ $(t>0)$ とおくと

$$\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}-2>0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2>0$$

$$t^2-t-2>0 \qquad \therefore \quad (t-2)(t+1)>0$$

$t>0$ より

$$t>2 \qquad \therefore \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$$\underline{\boldsymbol{x<-1}}$$

197 与えられた不等式を変形すると

$$a^{2x-1}-a^{x+2}-a^{x-3}+1 \leqq 0$$

$$a^{-1}\cdot(a^x)^2-(a^2+a^{-3})a^x+1 \leqq 0$$

$a^x=t$ $(t>0)$ とおくと

$$\frac{1}{a}t^2-\left(a^2+\frac{1}{a^3}\right)t+1 \leqq 0$$

両辺を $a^3(>0)$ 倍すると

$$a^2t^2-(a^5+1)t+a^3 \leqq 0$$

$$(a^2t-1)(t-a^3) \leqq 0$$

a^3 と $\dfrac{1}{a^2}$ の大小は

$$a^3-\frac{1}{a^2}=\frac{a^5-1}{a^2}$$

より，$0<a<1$，$a>1$ により決まる。

(i) **$0<a<1$ のとき**，$a^3<\dfrac{1}{a^2}$ なので

$$a^3 \leqq t \leqq \frac{1}{a^2} \qquad a^3 \leqq a^x \leqq a^{-2} \qquad \therefore \quad -2 \leqq x \leqq 3$$

(ii) **$a>1$ のとき**，$a^3>\dfrac{1}{a^2}$ なので

$$\frac{1}{a^2} \leqq t \leqq a^3 \qquad a^{-2} \leqq a^x \leqq a^3 \qquad \therefore \quad -2 \leqq x \leqq 3$$

以上 (i), (ii) より

$$\underline{\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 3}}$$