問題

対数の最大・最小

206 $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ のとき，$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$ の最大値を求めよ。

（酪農学園大）

207 (1) $0 \leqq x \leqq 7$ のとき，$f(x) = \log_{10}(x+3) + \log_{10}(9-x)$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（北海道工業大）

(2) 関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+6) + \log_{\frac{1}{3}}(-x+12)$ は $x = \boxed{}$ のとき，最小値 $\boxed{}$ をとる。（広島工業大）

チェック・チェック

対数の最大・最小

206 $\log_2 x = t$ とおけば，y は t の 2 次関数です。

207 (1) 真数条件（真数 >0）より

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 9-x>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad -3<x<9$$

$f(x)$ はこの範囲で定義される関数ですが，$0 \leqq x \leqq 7$ はさらに強い条件となっています。

(2) まず，真数条件（真数 >0）をおさえます。与式は

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\{(x+6)(-x+12)\}$$

と変形できます。$y = \log_{\frac{1}{3}} X$ は単調減少関数なので真数 X が最大のとき，y は最小となります。

解答・解説

対数の最大・最小

206 $\log_2 x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ より

$$\log_2 2^{-1} \leqq \log_2 x \leqq \log_2 2^3$$

$$\therefore \quad -1 \leqq t \leqq 3$$

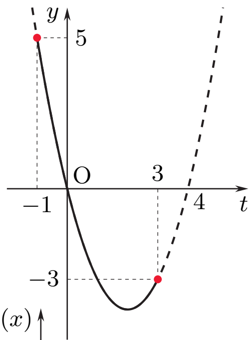
与式を t で表すと

$$y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

よって，$t = -1$ において最大値

$$(-1-2)^2 - 4 = \underline{\mathbf{5}}$$

をとる。



207 (1) $0 \leqq x \leqq 7$ は (真数) > 0 をみたすから

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10}(x+3) + \log_{10}(9-x) \\ &= \log_{10}(x+3)(9-x) \\ &= \log_{10}(-x^2+6x+27) \end{aligned}$$

ここで

$$g(x) = -x^2 + 6x + 27 = -(x-3)^2 + 36$$

とおくと，$0 \leqq x \leqq 7$ より，$g(x)$ の

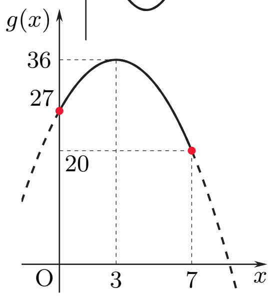
最大値は $g(3) = 36$，最小値は $g(7) = 20$

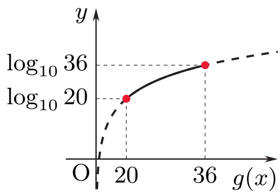
である。したがって，$f(x) = \log_{10} g(x)$ の

最大値は $f(3) = \log_{10} 36 = \underline{\mathbf{2\log_{10} 6}}$

最小値は $f(7) = \log_{10} 20 = \underline{\mathbf{1 + \log_{10} 2}}$

である。





(2) (真数) > 0 より

$x + 6 > 0$ かつ $-x + 12 > 0$　すなわち　$-6 < x < 12$

与式を変形すると

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\{(x+6)(-x+12)\} = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+6x+72)$$

底が 1 より小さいので

$$-x^2 + 6x + 72 = -(x-3)^2 + 81$$

が最大となるとき，y は最小となる。よって，$\underline{\mathbf{x = 3}}$ のとき

最小値 $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} = \underline{\mathbf{-4}}$