問題

最大・最小（2 変数）

208 正の数 x，y が $2x+3y=6$ をみたすとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。（城西大）

209 正の数 x，y が条件 $xy^2=64$ をみたすとき，$(\log_2 x^4)(\log_2 y)$ の最大値は $\boxed{}$ である。（中京大）

チェック・チェック

最大・最小（2 変数）

208，**209** 2 変数の最大・最小問題ですが，等式による条件があるので **1 文字消去**が可能です。相加・相乗平均の関係を使うこともできます。

解答・解説

最大・最小（2 変数）

208 $2x+3y=6$ $(x>0,\ y>0)$ より，$y=-\dfrac{2}{3}x+2$ $(0<x<3)$ であり

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}\left\{x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)\right\}$$
$$=\log_{10}\left\{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right\}$$

よって，$x=\dfrac{3}{2}$ $(y=1)$ のとき最大となり，最大値は $\underline{\boldsymbol{\log_{10}\frac{3}{2}}}$

別解 $\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy$ より，xy の最大値を求めればよい。$x>0$ かつ $y>0$ より，相加・相乗平均の関係を用いると

$$6=2x+3y\geqq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy} \qquad \therefore\ \frac{3}{2}\geqq xy$$

等号が成り立つのは $\begin{cases}2x=3y\\2x+3y=6\end{cases}$ すなわち $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=1\end{cases}$ のときである。

よって，求める最大値は $\log_{10}\dfrac{3}{2}$

209 $xy^2=64$ より

$$\log_2 xy^2=\log_2 64$$
$$\log_2 x+2\log_2 y=6 \qquad \therefore\ \log_2 y=3-\frac{1}{2}\log_2 x$$

ここで，$\boldsymbol{\log_2 x=X}$ **とおくと**

$$(\log_2 x^4)(\log_2 y)=4\log_2 x\cdot\left(3-\frac{1}{2}\log_2 x\right)=4X\left(3-\frac{1}{2}X\right)$$
$$=-2X^2+12X=-2(X-3)^2+18$$

X は実数全体を動くから，$X=3$ のとき，最大値 $\underline{\mathbf{18}}$ である。

別解 相加・相乗平均の関係を用いた解法も可能である。