問題

平均変化率と微分係数

223 $c < d$ のとき，x が c から d まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化率を

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

で定義する。このとき，$f(x)=x^3-x^2$ について，次の設問に答えよ。

(1) x が 1 から 3 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(2) $x=1$ における $f(x)$ の微分係数を求めよ。

(3) x が a から $a+2$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数より大きくなるような a の値の範囲を求めよ。

（岡山理科大）

チェック・チェック

平均変化率と微分係数

223 平均変化率と微分係数の定義を確認しておきましょう。

関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

を x が a から b まで変わるときの $f(x)$ の**平均変化率**といいます。また

$$\boldsymbol{\lim_{b \to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\quad\left(h=b-a \text{ とおくと } \boldsymbol{\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}\right)$$

が存在するとき，これを $f'(a)$ とかき，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といいます。

解答・解説

平均変化率と微分係数

223 (1) $f(x)=x^3-x^2$ より，求める平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27-9)-(1-1)}{2}=\underline{\mathbf{9}}$$

(2) $f(x)=x^3-x^2$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-(1+h)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(1+2h+h^2)=\underline{\mathbf{1}}$$

(3) x が a から $a+2$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{\{(a+2)^3-(a+2)^2\}-(a^3-a^2)}{2}=\frac{6a^2+8a+4}{2}$$
$$=3a^2+4a+2$$

$x=a$ における $f(x)$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^3-(a+h)^2\}-(a^3-a^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+(3a-1)h^2+(3a^2-2a)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{h^2+(3a-1)h+3a^2-2a\}$$
$$=3a^2-2a$$

よって，x が a から $a+2$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率が，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数より大きくなるような a の値の範囲は

$$3a^2+4a+2>3a^2-2a \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a>-\frac{1}{3}}}$$