問題

放物線と接線・法線

230 点 $(0,\ 3)$ を通って，曲線 $y=x^2$ 上の点 $(-1,\ 1)$ における接線に平行な直線の方程式を求めよ。（酪農学園大）

231 点 $(-1,\ -3)$ から放物線 $y=x^2$ へ引いた 2 本の接線の方程式を求めよ。（中部大）

232 放物線 $y=2x^2$ 上の点 A と点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を結ぶ直線は点 A における放物線の接線と直交する。点 A の y 座標を求めよ。（自治医科大）

チェック・チェック

放物線と接線・法線

230 関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾き**です。

231 まずは，放物線上の接点を $(t,\ t^2)$ とおきましょう。この接点における接線が点 $(-1,\ -3)$ を通ることから t の値が決まります。

232 点 A における放物線の法線が点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を通るということです。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**法線の方程式**は

$f'(a)\neq 0$ のとき　　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

$f'(a)=0$ のとき　　$x=a$

まとめて

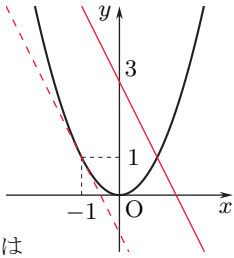
$$f'(a)(y-f(a))=-(x-a)$$

となります。

解答・解説

放物線と接線・法線

230 $y = x^2$ より　　$y' = 2x$



点 $(-1,\ 1)$ における**接線の傾き**は

$$2 \times (-1) = -2$$

よって，求める直線の方程式は，y 切片が 3 より

$$\underline{\boldsymbol{y = -2x + 3}}$$

231 $y = x^2$ より　　$y' = 2x$

よって，放物線 $y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 \qquad \therefore \quad y = 2tx - t^2$$

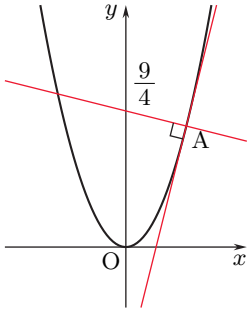
これが点 $(-1,\ -3)$ を通るので

$$-3 = -2t - t^2$$
$$t^2 + 2t - 3 = 0$$
$$(t + 3)(t - 1) = 0 \qquad \therefore \quad t = 1,\ -3$$

よって，求める接線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y = 2x - 1,\quad y = -6x - 9}}$$

232 $y = 2x^2$ より　　$y' = 4x$



点 $\mathrm{A}(a,\ 2a^2)$ における放物線の**法線の方程式**は

$a \neq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{4a}(x - a) + 2a^2$$
$$\therefore \quad x + 4ay - 8a^3 - a = 0$$

これは，$a = 0$ のときも成り立つ。

この法線が点 $\left(0,\ \dfrac{9}{4}\right)$ を通るためには

$$9a - 8a^3 - a = 0$$
$$a(a^2 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad a = 0,\ \pm 1$$

よって，点 A の y 座標は　　$y = 2a^2 = \underline{\boldsymbol{0,\ 2}}$