問題

極値

239 (1) 関数 $y = 9x - 3x^2 - 5x^3$ の極値を求めよ。（成城大）

(2) 関数 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ は，$x = \boxed{}$ で，極大値 $\boxed{}$ をとる。
（神戸薬科大）

240 3 次関数 $y = x^3 + px$ が，$x = 1$ で極小値をとるとき，極大値を与える x の値は $\boxed{}$ である。（法政大）

241 3 次関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ で，(極大値) − (極小値) の値を求めよ。（千葉工業大）

チェック・チェック

極値

239，**240** 関数 $f(x)$ において，$x = a$ を内部に含む十分小さい区間において，a と異なる任意の x に対して

$f(a) < f(x)$ ならば，$f(a)$ を極小値
$f(x) < f(a)$ ならば，$f(a)$ を極大値

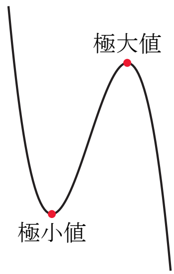
といいます。つまり，**局所的な最小値が極小値，局所的な最大値が極大値**です。

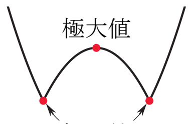
微分可能な関数においては，$f'(x)$ の符号が負から正に変わるところが極小値，正から負に変わるところが極大値です。

連続な関数においては

減少から増加に変わるところが極小値
増加から減少に変わるところが極大値

です。





241 $f'(x) = 0$ の解 α，β が代入しやすい値のときは $|f(\alpha) - f(\beta)|$ を直接計算すればよいのですが，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ の計算が複雑なときは，$f(x)$ を $f'(x)$ でわって

$$f(x) = f'(x)q(x) + r(x) \quad (q(x)\text{ は商，}r(x)\text{ は余り})$$

という等式を準備しておきます。$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ なので

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |r(\alpha) - r(\beta)|$$

となります。

解答・解説

極値

239 (1) $y=-5x^3-3x^2+9x$ より

$$\begin{aligned}y'&=-15x^2-6x+9\\&=-3(5x^2+2x-3)\\&=-3(x+1)(5x-3)\end{aligned}$$

となるから，増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって，求める極値は

$x=\frac{3}{5}$ のとき極大値　$-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+9\cdot\frac{3}{5}=\underline{\mathbf{\frac{81}{25}}}$

$x=-1$ のとき極小値　$-5\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)=\underline{\mathbf{-7}}$

(2) $f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

$f'(x)=0$ のとき，$x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ となるから，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$\underline{\boldsymbol{x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}}}$ で極大値をとり，極大値は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)&=f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\underline{\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}}\end{aligned}$$

240 $f(x)=x^3+px$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+p$$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値をもつから

$$\boldsymbol{f'(1)=0}\quad \text{すなわち}\quad 3+p=0 \qquad \therefore\quad p=-3$$

であることが必要である。このとき

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

であり，$f(x)$ の増減表は右のようになる。よって，極大値を与える x の値は

$\underline{\boldsymbol{x=-1}}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

241 $f(x)=x^3-9x^2+12x-1$ より

$$f'(x)=3x^2-18x+12=3(x^2-6x+4)$$

$f'(x)=0$ のとき

$$x=3\pm\sqrt{5}$$

いま，$\alpha=3-\sqrt{5}$，$\beta=3+\sqrt{5}$ とすると，増減表は右のようになる。$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(x)=(x^2-6x+4)(x-3)-10x+11$$

より

$$f(\alpha)-f(\beta)=(-10\alpha+11)-(-10\beta+11)$$
$$=10(\beta-\alpha)=10\times2\sqrt{5}=\underline{\boldsymbol{20\sqrt{5}}}$$

別解 積分を学んだ人は（α，β を設定するところまでは同じで）

$$\boldsymbol{f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx}=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{5})^3=20\sqrt{5}$$