問題

3 次関数のグラフ

242 (1) 関数 $y = x^3 - 12x + 5$ のグラフをえがけ。 （津田塾大）

(2) $f(x) = -x^3 + 8x + 3$ とするとき，関数 $y = f(x)$ の極値を求め，グラフをかけ。 （東京海洋大　改）

243 x についての 3 次関数 $f(x) = x^3 + px^2 + 27x$ がある。$f(x)$ が単調増加関数となる p の最大値を求めよ。 （自治医科大）

244 3 次関数 $y = x^3 - 3ax + 2$ のグラフが x 軸と一点のみを共有するような a の範囲を求めよ。 （津田塾大）

245 3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフは，点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x = 1$ で極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。a，b，c，d の値を求めよ。 （福島大）

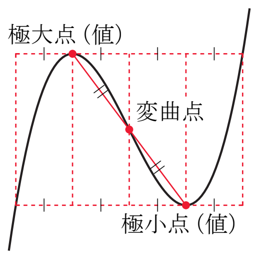
チェック・チェック

3 次関数のグラフ

242〜**245** 3 次関数

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a > 0)$$

のグラフは，極大となる点と極小となる点の中点（変曲点という）に関して点対称であり，右図のようになります。



解答・解説

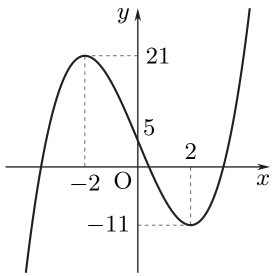
3 次関数のグラフ

242 (1) $y=x^3-12x+5$ より

$$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

下の増減表から，グラフは <u>右図</u> のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$



(2) $f(x)=-x^3+8x+3$ より

$$f'(x)=-3x^2+8$$

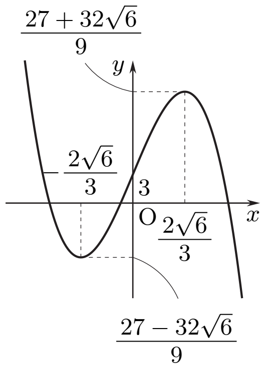
$f'(x)=0$ を解くと $x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ だから，$f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f(x)=(-3x^2+8)\cdot\dfrac{1}{3}x+\dfrac{16}{3}x+3$ であるから

$$\text{極小値 } f\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{16}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)+3=\underline{\boldsymbol{\frac{27-32\sqrt{6}}{9}}}$$

$$\text{極大値 } f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{16}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}+3=\underline{\boldsymbol{\frac{27+32\sqrt{6}}{9}}}$$



グラフは <u>右上図</u> のようになる。

243 $f(x)$ が単調増加である条件は，つねに $f'(x)\geqq 0$ となることである。

$$f'(x)=3x^2+2px+27=3\left(x+\frac{p}{3}\right)^2+27-\frac{p^2}{3}$$

よって

$$27-\frac{p^2}{3}\geqq 0 \qquad p^2\leqq 81 \qquad \therefore\quad -9\leqq p\leqq 9$$

求める p の最大値は <u>**9**</u> である。

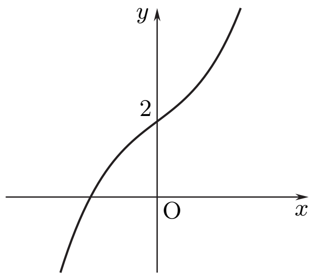
244 $f(x)=x^3-3ax+2$ とおく。

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$-a \geqq 0 \text{ より } f'(x) \geqq 0$$

したがって，**$f(x)$ は単調増加**となり，x 軸と一点のみを共有する。

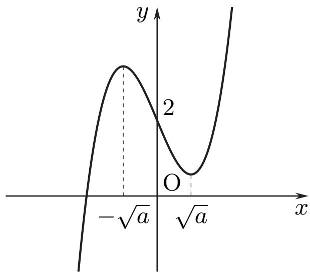


(ii) $a>0$ のとき

$$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

より，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



ここで,「極大値 $>$ 極小値」より $f(x)$ が x 軸と 1 点のみで交わるためには，**極小値が正**であればよい。

したがって

$$f(\sqrt{a})=a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+2=2(1-a\sqrt{a})>0$$

より

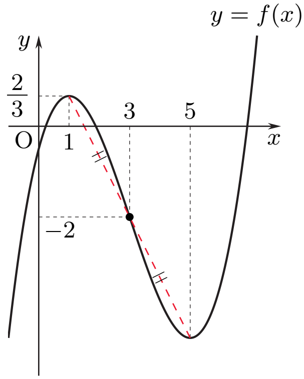
$$a\sqrt{a}<1 \qquad a^{\frac{3}{2}}<1 \qquad \therefore \qquad 0<a<1$$

(i)，(ii) より，求める a の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{a<1}}$$

245 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。$y=f(x)$ のグラフは，**点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x=1$ で極大値をとるから，$x=5$ で極小となる。** よって

$$f'(x)=3a(x-1)(x-5)$$
$$=3ax^2-18ax+15a$$



$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ と比較して

$$b=-9a,\quad c=15a$$

したがって

$$f(x)=a(x^3-9x^2+15x)+d \quad \cdots(*)$$

となる。すると，$f(3)=-2,\ f(1)=\frac{2}{3}$ より

$$\begin{cases} f(3)=a(27-81+45)+d=-2 \\ f(1)=a(1-9+15)+d=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -9a+d=-2 & \cdots\cdots ① \\ 7a+d=\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より

$$16a=\frac{8}{3} \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{6},\quad d=-2+\frac{9}{6}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，$(*)$ より

$$f(x)=\frac{1}{6}(x^3-9x^2+15x)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{a=\frac{1}{6},\quad b=-\frac{3}{2},\quad c=\frac{5}{2},\quad d=-\frac{1}{2}}}$$