問題

関数の決定

272 $a>0$ とする。1 次関数 $f(x)=ax+b$ が

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0,\quad \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=1$$

をみたすとき，$a=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$，$b=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である。

（大阪電気通信大）

273 次の 3 つの等式をみたす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=4,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=1,\quad \int_{-1}^0 f(x)\,dx=3$$

（久留米工業大）

チェック・チェック

関数の決定

272 与えられた 2 つの条件式から a，b についての 2 つの等式が得られます。

273 2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおいてみましょう。

解答・解説

関数の決定

272 与えられた条件より

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(ax+b)\,dx=\left[a\cdot\frac{x^2}{2}+bx\right]_0^1=\frac{a}{2}+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx=\int_0^1(a^2x^2+2abx+b^2)\,dx=\left[a^2\cdot\frac{x^3}{3}+abx^2+b^2x\right]_0^1$$

$$=\frac{a^2}{3}+ab+b^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①より $b=-\dfrac{a}{2}$ だから，②に代入すると

$$\frac{a^2}{3}+a\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)^2=1 \qquad \therefore \quad \frac{a^2}{12}=1$$

$a>0$ より

$$a=\underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}, \quad b=-\frac{2\sqrt{3}}{2}=\underline{\mathbf{-\sqrt{3}}}$$

273 2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ であり，与えられた条件は

$$f'(1)=2a+b=4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^0=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=3 \quad \cdots\cdots ③$$

② − ③ より　$b=-2$

①に代入すると　$2a-2=4 \quad \therefore \quad a=3\ (a\neq 0$ をみたす$)$

②に代入すると　$\dfrac{3}{3}+\dfrac{-2}{2}+c=1 \quad \therefore \quad c=1$

よって，求める 2 次関数は

$$\underline{\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x+1}}$$