問題

定積分で表された関数（定数型）

278 関数 $f(x)$ が $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)\,dt$ をみたす。このとき，

$a=\int_0^1 f(t)\,dt$ の値は，$a=\boxed{}$ である。また，$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\boxed{}$ である。

（玉川大）

279 等式 $f(x)=3x^2-2x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_{-2}^0 f(t)\,dt$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

（岡山理科大）

280 $f(x)=1-\int_0^1 (2x-t)f(t)\,dt$ のとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

（小樽商科大）

チェック・チェック

定積分で表された関数（定数型）

278，**279** 積分区間に着目します。**定積分の下端，上端が定数**のとき

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ は定数 } k$$

とおくことができます。

280 積分変数は t ですから，積分の計算においては x は定数なので **x は積分の外に出して**しまいます。

$$\int_0^1 (2x-t)f(t)\,dt=2x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$$

あとは **279** と同じ考え方です。

解答・解説

定積分で表された関数（定数型）

278 $a=\int_0^1 f(t)\,dt$ **とおく**と $f(x)=x^2+2a$ であり

$$a=\int_0^1 (t^2+2a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a \qquad \therefore \quad a=\underline{-\frac{1}{3}}$$

このとき，$f(x)$ は偶関数より

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=2\int_0^1 f(t)\,dt=2a=\underline{-\frac{2}{3}}$$

279 $\int_0^1 f(t)\,dt=a,\ \int_{-2}^0 f(t)\,dt=b$ **とおく**と $f(x)=3x^2-2ax+b$ だから

$$a=\int_0^1 (3t^2-2at+b)dt=\left[t^3-at^2+bt\right]_0^1=1-a+b$$

$$\therefore \quad b=2a-1 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$b=\int_{-2}^0 (3t^2-2at+b)\,dt=\left[t^3-at^2+bt\right]_{-2}^0=-(-8-4a-2b)$$

$$\therefore \quad b+4a+8=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\quad a=-\frac{7}{6},\ b=-\frac{10}{3} \qquad \therefore \quad \underline{f(x)=3x^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}}$

280 **x を積分の外に出す**と

$$f(x)=1-2x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

$A=\int_0^1 f(t)\,dt,\quad B=\int_0^1 tf(t)\,dt$ **とおく**と $f(x)=1+B-2Ax$ となる。

$$A=\int_0^1 (1+B-2At)\,dt=\left[(1+B)t-At^2\right]_0^1=(1+B)-A$$

$$\therefore \quad 2A-B=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$B=\int_0^1 \{(1+B)t-2At^2\}dt=\left[(1+B)\frac{t^2}{2}-2A\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1+B}{2}-\frac{2}{3}A$$

$$\therefore \quad 4A+3B=3 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\quad A=\frac{3}{5},\ B=\frac{1}{5} \qquad \therefore \quad \underline{f(x)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x}$