問題

放物線と直線

286 次の領域の面積を求めよ。

$$2x-2 \geqq y \geqq 2x^2-8x+6$$

（自治医科大）

287 放物線 $y=x^2+1$ 上の点 P における接線と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積は，P によらず一定であることを示せ。（城西大）

288 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を，直線 $y=mx$ が 2 等分するように m を定めなさい。（大阪薬科大）

チェック・チェック

放物線と直線

286 図をかきましょう。直線 $y=2x-2$ と放物線 $y=2x^2-8x+6$ との交点の x 座標も必要です。

287 P の座標を $(t,\ t^2+1)$ とおき，P における接線と放物線 $y=x^2$ との交点の x 座標を求めます。文字 t がでてゴチャゴチャしますが，中身は **286** と同じです。

288 放物線と直線の交点の x 座標は，2 次方程式

$$-x^2+2x=mx$$

の実数解です。これを解くことにより積分区間がわかり

放物線と直線とで囲まれる部分の面積

$$=\frac{1}{2}(\text{放物線と } x \text{ 軸とで囲まれる部分の面積})$$

という関係を積分の式で表すことができます。

解答・解説

放物線と直線

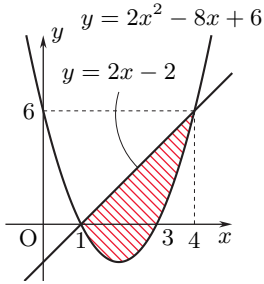
286 $2x-2=2x^2-8x+6$

$2x^2-10x+8=0$

$(x-1)(x-4)=0$

より，$y=2x-2$ と $y=2x^2-8x+6$ は点 $(1,\ 0)$，$(4,\ 6)$ で共有点をもつ。

右図より，求める面積は



$$\int_1^4\{(2x-2)-(2x^2-8x+6)\}\,dx$$

$$=\int_1^4(-2x^2+10x-8)\,dx=-2\int_1^4(x-1)(x-4)\,dx=-2\times\frac{-(4-1)^3}{6}=\underline{\mathbf{9}}$$

287 放物線 $y=x^2+1$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ より

$y=2t(x-t)+t^2+1$

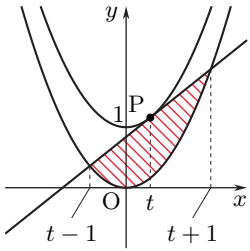
$\therefore\quad y=2tx-t^2+1$

この接線と放物線 $y=x^2$ との交点の x 座標は

$x^2=2tx-t^2+1$

$x^2-2tx+(t-1)(t+1)=0$

$(x-t+1)(x-t-1)=0\qquad\therefore\quad x=t-1,\ t+1$



したがって，題意の面積は

$$\int_{t-1}^{t+1}\{(2tx-t^2+1)-x^2\}dx=-\int_{t-1}^{t+1}(x-t+1)(x-t-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(t+1)-(t-1)\}^3=\frac{4}{3}\quad(\text{定数})$$

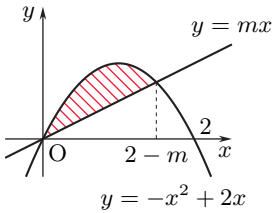
となり，P の位置によらず一定である。　　（証終）

288 $y=-x^2+2x=-x(x-2)$ と x 軸との交点は $x=0,\ 2$ である。

また，$y=mx$ との交点は

$-x^2+2x=mx\qquad\therefore\quad x=0,\ 2-m$

$0<m<2$ で考えればよい。面積を 2 等分するのは



$$\boldsymbol{\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}\,dx}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\int_0^2(-x^2+2x)\,dx}$$

$$\frac{1}{6}(2-m)^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\cdot2^3\qquad(2-m)^3=2^2\qquad\therefore\quad\underline{\boldsymbol{m=2-2^{\frac{2}{3}}}}$$