問題

放物線と放物線，放物線と円

289 (1) 2 つの放物線 $y = 4x^2 + 3x - 16$ と $y = x^2 + 6x - 10$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。（秋田大）

(2) $a > 0$ に対して，xy 平面上の 2 曲線

$$y = x^2 - ax + a^2, \quad y = -x^2 + ax + 2a^2$$

によって囲まれる図形の面積は $\boxed{}$ である。（明治大）

290 a が不等式 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ をみたすとき，放物線

$$y = ax^2 + 2 - 12a \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。この放物線は a の値に関係なく定点 $\left(\pm\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}},\ \boxed{ウ}\right)$ を通る。放物線①と円

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点の y 座標は $\boxed{エ}$ である。

そして，$a = \dfrac{1}{4}$ のとき，放物線①と円②で囲まれる部分のうち，放物線の上側にある部分の面積は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}} + \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}\pi$ である。

（センター試験　改）

チェック・チェック

放物線と放物線，放物線と円

289 (1) 2 曲線の交点を求め，グラフをかきましょう。

(2) 2 曲線の交点の x 座標は根号を含みます。とりあえず，これらを α，β $(\alpha < \beta)$ とおいてみましょう。

290 ① が **a の値に関係なく**通る点を求めるには，① を **a についての恒等式**として処理します。

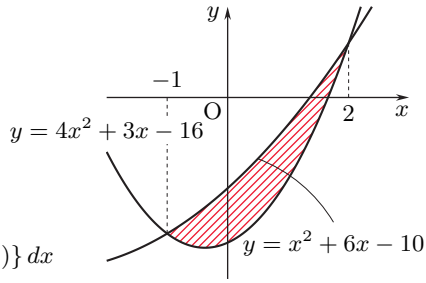
面積を求めるときは積分を使いますが，扇形の面積の公式も利用します。

解答・解説

放物線と放物線，放物線と円

289 (1) 2 つの放物線の交点の x 座標は

$$4x^2+3x-16=x^2+6x-10$$
$$3x^2-3x-6=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0$$
$$\therefore\quad x=-1,\ 2$$



なので，囲まれる図形の面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(x^2+6x-10)-(4x^2+3x-16)\}\,dx$$
$$=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=\frac{3}{6}\{2-(-1)\}^3=\underline{\mathbf{\frac{27}{2}}}$$

(2) $f(x)=x^2-ax+a^2$，$g(x)=-x^2+ax+2a^2$ とおく。

$$f(x)=g(x)\qquad\therefore\quad 2x^2-2ax-a^2=0\quad\cdots\cdots①$$

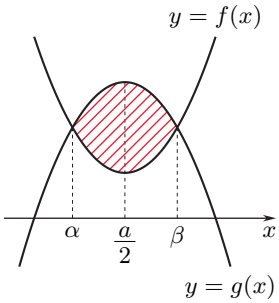
判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-2(-a^2)=3a^2>0\quad(\because\quad a>0)$$

より，① は異なる 2 実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつ。

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}a,\quad \beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a\quad(\because\quad a>0)$$

求める面積 S は



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=2\times\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-\frac{1-\sqrt{3}}{2}a\right)^3$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{3}a)^3=\underline{\boldsymbol{\sqrt{3}a^3}}$$

290 $y = ax^2 + 2 - 12a \quad \cdots\cdots ①$

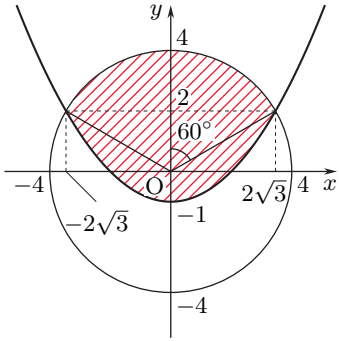
$\therefore \quad (x^2 - 12)a + (2 - y) = 0$

これが **a の値に関係なく成立する**のは

$x^2 - 12 = 0$ かつ $2 - y = 0$

$\therefore \quad x = \pm 2\sqrt{3}$ かつ $y = 2$

つまり，放物線は定点 $\underline{\mathbf{(\pm 2\sqrt{3},\ 2)}}$ を通る。



また，$x^2 + y^2 = 16 \quad \cdots\cdots ②$ より

$x^2 = 16 - y^2$

①へ代入して

$y = a(16 - y^2) + 2 - 12a$

$ay^2 + y - 2(2a + 1) = 0$

$(ay + 2a + 1)(y - 2) = 0 \qquad \therefore \quad y = 2,\ -\dfrac{2a+1}{a} \quad (\because \quad a > 0)$

ここで，$-\dfrac{2a+1}{a} = -2 - \dfrac{1}{a} < -4$ であるから，①と②の交点の y 座標は $\underline{\mathbf{2}}$

そして，$a = \dfrac{1}{4}$ のとき，①は $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ となり，上図より，求める面積 S は

$$S = \left(\pi \cdot 4^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \sin 120^\circ\right) + \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left\{2 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right\} dx$$

$$= \left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{4} \times \frac{(4\sqrt{3})^3}{6} = \underline{\boldsymbol{4\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi}}$$