問題

絶対値を含む関数で表された図形

291 (1) $y=|x-1|-2$ のグラフをかけ。

(2) (1) のグラフと放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-9$ とで囲まれた部分の面積を求めよ。 (山口大)

292 曲線 $y=|x^2-4|$ と直線 $y=x+2$ がある。

(1) この曲線と直線との交点の x 座標は，小さい方から順に -2, $\boxed{}$, $\boxed{}$ である。

(2) この曲線と直線とで囲まれた部分の面積を S とすると，$S=\boxed{}$ である。 (明治大)

チェック・チェック

絶対値を含む関数で表された図形

291 (1) グラフは折れ線です。

(2) **図形の対称性**を活かしましょう。

292 図形をかいて，まずは素直に計算してみましょう。

次に 別解 にあるように公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

をフル活用させる解答を経験しておきましょう。

解答・解説

絶対値を含む関数で表された図形

291 (1) $x \geqq 1$ のとき

$$y=|x-1|-2=(x-1)-2=x-3$$

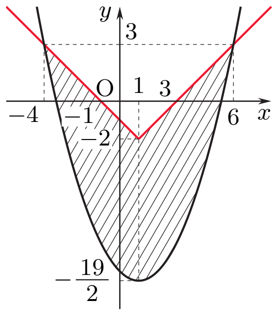
$x<1$ のとき

$$y=|x-1|-2=-(x-1)-2=-x-1$$

であるから

$$y=\begin{cases} x-3 & (x \geqq 1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$$

より，$y=|x-1|-2$ のグラフは <u>**右図の色線部分**</u>。



(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-9=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{19}{2}$ より，放物線の軸の方程式は $x=1$ で，問題の部分は**直線 $x=1$ に関して対称**である。

$x>1$ における放物線と直線の交点の x 座標は

$$x-3=\frac{1}{2}x^2-x-9$$

$$(x-6)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=6\ (>1)$$

したがって，求める面積 S は

$$S=\mathbf{2}\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{6}}\left\{(x-3)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-9\right)\right\}\boldsymbol{dx}$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{6}+x^2+6x\right]_1^6=\underline{\mathbf{\frac{175}{3}}}$$

別解 面積を求める計算は次のようにもできる。

$$S=\int_{-4}^{6}\left\{3-\left(\frac{1}{2}x^2-x-9\right)\right\}dx-\frac{1}{2}\times 10\times 5$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{6}(x+4)(x-6)\,dx-25=\frac{1}{2}\cdot\frac{10^3}{6}-25=\frac{175}{3}$$

292 (1) $y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leqq -2,\ x \geqq 2) \\ 4 - x^2 & (-2 < x < 2) \end{cases}$

であるから

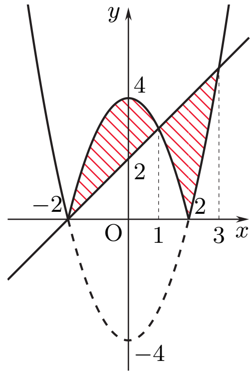
(i) $-2 < x < 2$ のとき

$$4 - x^2 = x + 2$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$\therefore \quad x = 1 \quad (\because \quad -2 < x < 2)$$

(ii) $x \leqq -2,\ x \geqq 2$ のとき

$$x^2 - 4 = x + 2$$
$$(x+2)(x-3) = 0$$
$$\therefore \quad x = -2,\ 3$$

よって，小さい順に　　-2, $\underline{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{3}}$



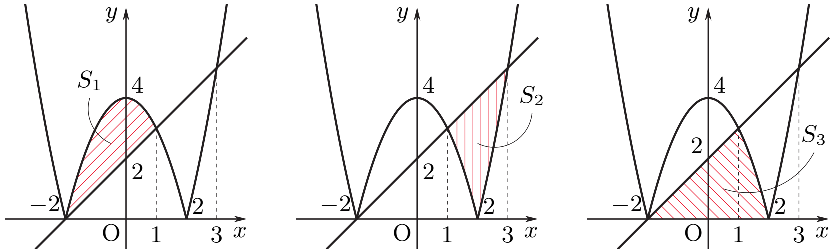
(2) 曲線と直線の位置関係は上の図のようになるので，
求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} \{(4 - x^2) - (x+2)\}\,dx + \int_{1}^{2} \{(x+2) - (4 - x^2)\}\,dx + \int_{2}^{3} \{(x+2) - (x^2 - 4)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{1 - (-2)\}^3 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_2^3$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} + \frac{13}{6} = \underline{\boldsymbol{\frac{17}{2}}}$$

別解 解答では面積を定積分で忠実に表すという方法をとっているが，図形的に考えて次のようにしてもよい。図のように S_1，S_2，S_3 とすると



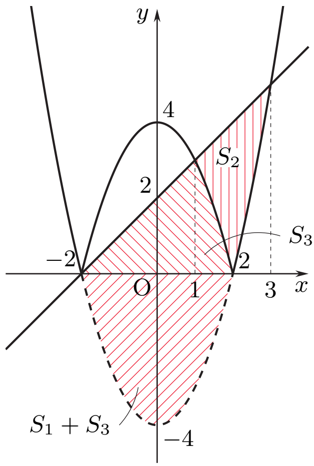
$$S_1=\int_{-2}^{1}\{-(x+2)(x-1)\}\,dx=\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=\frac{3^3}{6}$$

$$S_1+S_3=\int_{-2}^{2}\{-(x+2)(x-2)\}\,dx=\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3=\frac{4^3}{6}$$

$$\therefore\quad S_3=\frac{4^3-3^3}{6}=\frac{37}{6}$$

また

$$\begin{aligned}&(S_1+S_3)+S_3+S_2\\&=\int_{-2}^{3}\{-(x+2)(x-3)\}\,dx\\&=\frac{1}{6}\{3-(-2)\}^3=\frac{5^3}{6}\end{aligned}$$



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=(S_1+2S_3+S_2)-2S_3\\&=\frac{5^3}{6}-2S_3=\frac{125-74}{6}\\&=\frac{51}{6}=\frac{17}{2}\end{aligned}$$