問題

等比中項

309 $1 < a < b$ とする。$1,\ a,\ b$ はこの順で等差数列で，$a,\ 2b,\ 2ab$ はこの順で等比数列である。このとき，$a,\ b$ の値を求めよ。（関西大）

310 直角三角形の 3 つの角の大きさ $A,\ B,\ C$ が，この順で等比数列であるとき，その公比を求めよ。ただし，角度には弧度法を用いるものとする。（電気通信大　改）

311 $\alpha,\ \beta,\ \alpha\beta\ \ (\alpha < 0 < \beta)$ は，ある順番で並べると等比数列になるという。また $\alpha + \beta = 1$ が成り立っている。このとき，$\beta - \alpha = \boxed{}$ であり，$-\alpha\beta = \boxed{}$ である。（明治大）

チェック・チェック

等比中項

309 **$a,\ b,\ c$ がこの順で等比数列をなす**

$\iff \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$ （$=$ 公比）

$\iff \boldsymbol{b^2 = ac}$ **（等比中項）**

310 $A,\ B,\ C$ の大小は

$A < B < C$ または $A > B > C$

の 2 通りがありますが，いずれのときも $A,\ B,\ C$ がこの順序で等比数列をなす条件は $B^2 = AC$ です。

311 $\alpha < 0,\ \beta > 0$ より $\alpha\beta < 0$ となります。3 つの数 $\alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$ が等比数列をなすためには，$\ominus$，$\oplus$，$\ominus$の順に並ぶことが必要です。

解答・解説

等比中項

309 1，a，b がこの順に等差数列をなすので　　$2a = 1 + b$　……①

また，a，$2b$，$2ab$ がこの順に等比数列をなすので

$$(2b)^2 = a \cdot 2ab \qquad \therefore \quad b = \frac{1}{2}a^2 \quad (\because \quad b \neq 0)$$

①に代入して　　$a^2 - 4a + 2 = 0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{a = 2 + \sqrt{2}}}$　$(\because \quad a > 1)$

①に代入して　　$\boldsymbol{b} = 2(2 + \sqrt{2}) - 1 = \underline{\boldsymbol{3 + 2\sqrt{2}}}$

310 角 A，B，C はこの順で等比数列であるから　　$B^2 = AC$

また，直角三角形の内角でもあるから，最小のもの（A または C）を X とおくと，3 つの数 A，B，C は X，B，$\dfrac{\pi}{2}$ であり

$$B^2 = \frac{\pi}{2}X \quad \text{かつ} \quad 0 < X < B < \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad X + B = \frac{\pi}{2}$$

をみたすから

$$B^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \qquad 4B^2 + 2\pi B - \pi^2 = 0 \qquad \therefore \quad B = \frac{-\pi + \sqrt{5}\pi}{4}$$

よって　　$A < B < C$　$\left(A < B < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，公比 $= \dfrac{\pi}{2} \div B = \underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}}$

$A > B > C$　$\left(\dfrac{\pi}{2} > B > C\right)$ のとき，公比 $= B \div \dfrac{\pi}{2} = \underline{\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

311 $\alpha < 0 < \beta$ より　　$\alpha\beta < 0$

よって，α，β，$\alpha\beta$ が等比数列となるのは，3 つの数が負，正，負の順に並ぶとき，すなわち β が等比中項になるときである。

$$\beta^2 = \alpha \cdot \alpha\beta \qquad \therefore \quad \beta = \alpha^2 \quad (\because \quad \beta \neq 0)$$

これと $\alpha + \beta = 1$，$\alpha < 0$ より

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

以上より

$$\beta - \alpha = \underline{\boldsymbol{2 + \sqrt{5}}}, \quad -\alpha\beta = \underline{\boldsymbol{2 + \sqrt{5}}}$$