問題

階差数列と一般項

313 数列 1, 4, 8, 13, 19, 26, 34, $\cdots$ の第 30 項は $\boxed{}$ である。

（大阪電気通信大）

314 数列 -2, $\boxed{}$, 0, 4, 10, 18, $\boxed{}$, 40, $\cdots$ の第 $\boxed{}$ 項は 108 である。また，最初の 20 項の和は $\boxed{}$ である。

（関西学院大）

チェック・チェック

階差数列と一般項

313 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$b_k = a_{k+1} - a_k$$

ですから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots\\ &\qquad \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})\\ &= -a_1 + a_n\end{aligned}$$

つまり，**$n \geqq 2$ のとき**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

が成り立ちます。

314 0, 4, 10, 18 の部分に着目しましょう。

解答・解説

階差数列と一般項

313 与えられた数列を $\{a_n\}$ として，階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{array}{lccccccccc} a_n: & 1 & & 4 & & 8 & & 13 & & 19 & & 26 & & 34 & \cdots \\ b_n: & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & \cdots \end{array}$$

$\{b_n\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列なので　　$b_n = n+2$

したがって，**$n \geqq 2$ のとき**

$$a_n = \mathbf{1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+2)} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1 \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

$$\therefore \quad a_{30} = \frac{1}{2}\cdot 30^2 + \frac{3}{2}\cdot 30 - 1 = \underline{\mathbf{494}}$$

314 与えられた数列を $\{a_n\}$ として，階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} a_n: & -2 & & a_2 & & 0 & & 4 & & 10 & & 18 & & a_7 & & 40 & \cdots \\ b_n: & & b_1 & & b_2 & & 4 & & 6 & & 8 & & b_6 & & b_7 & & \cdots \end{array}$$

$\{b_n\}$ は公差 2 の等差数列と推察される。このとき

$$b_2 = 2, \quad b_1 = 0, \quad b_6 = 10, \quad b_7 = 12$$

であり

$$b_2 = 0 - a_2, \quad b_1 = a_2 - (-2), \quad b_6 = a_7 - 18, \quad b_7 = 40 - a_7$$

$$\therefore \quad -a_2 = 2, \quad a_2 + 2 = 0, \quad a_7 - 18 = 10, \quad 40 - a_7 = 12$$

よって，$a_2 = \underline{\mathbf{-2}}$，$a_7 = \underline{\mathbf{28}}$ はこれらをみたす。

$$b_n = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = -2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-2) = n^2 - 3n \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

また，$a_n = 108$ とすると

$$n^2 - 3n - 108 = 0 \qquad \therefore \quad (n+9)(n-12) = 0$$

n は自然数より $n = 12$ だから，108 は第 $\underline{\mathbf{12}}$ 項である。

また，最初の 20 項の和は

$$\sum_{n=1}^{20}(n^2 - 3n) = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - 3\cdot\frac{20\cdot 21}{2} = \underline{\mathbf{2240}}$$