問題

約数・倍数の和

324 (1) 4^5 の正の約数は $\boxed{\quad}$ 個あり，その総和は $\boxed{\quad}$ である。

(共立薬科大)

(2) 432 の正の約数は $\boxed{\quad}$ 個ある。そのうち偶数であるものをすべて加えると $\boxed{\quad}$ になる。 (福岡工業大)

325 1 から 100 までの整数のうちで 2 でも 3 でも割り切れないものは $\boxed{\quad}$ 個あり，それらの和は $\boxed{\quad}$ である。 (長崎総合科学大)

チェック・チェック

約数・倍数の和

324 約数を書き出せば，すぐにわかります。

(1) $4^5 = 2^{10}$ の正の約数は 2^0, 2^1, 2^2, $\cdots$, 2^{10} です。

(2) $432 = 2^4 \times 3^3$ の正の約数は

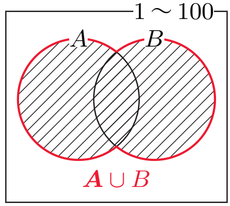
$$
\begin{aligned}
&2^0 3^0,\ 2^0 3^1,\ 2^0 3^2,\ 2^0 3^3,\\
&2^1 3^0,\ 2^1 3^1,\ 2^1 3^2,\ 2^1 3^3,\\
&\cdots\cdots,\\
&2^4 3^0,\ 2^4 3^1,\ 2^4 3^2,\ 2^4 3^3
\end{aligned}
$$

です。

325 「A : 2 でわり切れる数」,「B : 3 でわり切れる数」とすると,「$A \cup B$: 2 または 3 でわり切れる数」,「$A \cap B$: 6 でわり切れる数」となり，さらに

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

が成り立ちます。



解答・解説

約数・倍数の和

324 (1) $4^5=2^{10}$ の正の約数は $\mathbf{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{10}}$ の $\underline{\mathbf{11}}$ 個あり，総和は

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=\underline{\mathbf{2047}}$$

(2) $432=2^4\times3^3$ の正の約数は $\mathbf{2^i3^j\ (0\leqq i\leqq4,\ 0\leqq j\leqq3)}$ であるから，正の約数の個数は組 $(i,\ j)$ の個数と一致し，$(4+1)\times(3+1)=\underline{\mathbf{20}}$ 個である。このうち，偶数であるものの和は

$$2(1+3+3^2+3^3)+2^2(1+3+3^2+3^3)+2^3(1+3+3^2+3^3)+2^4(1+3+3^2+3^3)$$
$$=(2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+3^3)=\frac{2(2^4-1)}{2-1}\times\frac{3^4-1}{3-1}=\underline{\mathbf{1200}}$$

別解　同じことだが，$\sum$ の使い方にも慣れておこう。

偶数であるものは $2^i3^j(1\leqq i\leqq4,\ 0\leqq j\leqq3)$ であるから，求める和は

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{3}2^i3^j=\sum_{i=1}^{4}\left(2^i\sum_{j=0}^{3}3^j\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(2^i\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\right)=40\sum_{i=1}^{4}2^i$$
$$=40\cdot\frac{2(2^4-1)}{2-1}=40\cdot30=1200$$

325 $100\div2=50$ より　　2 の倍数は 50 個

$100\div3=33$ 余り 1 より　　3 の倍数は 33 個

$100\div6=16$ 余り 4 より　　6 の倍数は 16 個

よって，2 または 3 でわり切れるものは

$50+33-16=67$（個）

したがって，2 でも 3 でもわり切れないものは

$100-67=\underline{\mathbf{33}}$（個）

また

$$(2 \text{ の倍数の和})=2+4+6+\cdots+100=\frac{50(2+100)}{2}=2550$$

$$(3 \text{ の倍数の和})=3+6+9+\cdots+99=\frac{33(3+99)}{2}=1683$$

$$(6 \text{ の倍数の和})=6+12+18+\cdots+96=\frac{16(6+96)}{2}=816$$

$$(1 \text{ から } 100 \text{ までの和})=1+2+3+\cdots+100=\frac{100(1+100)}{2}=5050$$

より，求める総和は

$$5050-(2550+1683-816)=\underline{\mathbf{1633}}$$