問題

積の和

326 次のような n^2 個の数が配置されている。

$$\begin{array}{ccccc} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & \cdots & 1\cdot n \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & \cdots & 2\cdot n \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & \cdots & 3\cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\cdot 1 & n\cdot 2 & n\cdot 3 & \cdots & n^2 \end{array}$$

ここに並んでいる数の総和は $\boxed{}$ である。　（小樽商科大）

327 n が 2 以上の自然数のとき，1, 2, 3, $\cdots$, n の中から異なる 2 個の自然数を取り出してつくった積すべての和 S を求めよ。　（宮城教育大）

チェック・チェック

積の和

326 $(1+2+\cdots+n)^2$ を展開してみて下さい。実際

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2\{1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n\}$$

が成り立ちます。

一般に $(a+b+c+\cdots)^2$ を展開すると，平方和 $a^2+b^2+c^2+\cdots$ および，異なる 2 つの数の積の総和の 2 倍が現れます。

327 前問の表の中で，本問が求めているのは下の部分の総和です。

$$\begin{array}{ccccc} 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 4 & \cdots & 1\cdot n \\ & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & \cdots & 2\cdot n \\ & & 3\cdot 4 & \cdots & 3\cdot n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & (n-1)n \end{array}$$

解答・解説

積の和

326 与えられた n^2 個の数は，**$(1+2+\cdots+n)^2$ を展開**して出てくる項に一致するから

$$(\text{総和}) = (1+2+\cdots+n)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \underline{\boldsymbol{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}}$$

別解 第 k 行目は $k\cdot 1,\ k\cdot 2,\ \cdots,\ k\cdot n$ より

$$(\text{総和}) = \sum_{k=1}^{n}(k\cdot 1+k\cdot 2+\cdots+k\cdot n) = (1+2+\cdots+n)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

327 求める和を S とおくと

$$\boldsymbol{(1+2+3+\cdots+n)^2 = 2S + (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$$

より

$$2S = (1+2+3+\cdots+n)^2 - (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}}$$

別解 ij（$1 \leqq i < j \leqq n$）の総和を求めればよいから

$$S = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}ij = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1}i\right) = \sum_{j=2}^{n}\left\{j\cdot\frac{1}{2}j(j-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) - (1^3-1^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$