## 問題

### 格子点の個数

**328** 座標平面上で，$x$ 座標と $y$ 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。次の不等式を同時にみたす格子点の個数を求めよ。

(1) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 20$

(2) $y \geqq 0,\ y \leqq 2x,\ x+2y \leqq 20$ （滋賀大）

**329** $n$ を 1 以上の整数とする。

(1) $x+y \leqq n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ は，

全部で $\dfrac{1}{2}\left(\boxed{\phantom{00}}n^2+\boxed{\phantom{00}}n+\boxed{\phantom{00}}\right)$ 個ある。

(2) $x+y+z \leqq n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は，

全部で $\dfrac{1}{6}\left(\boxed{\phantom{00}}n^3+\boxed{\phantom{00}}n^2+\boxed{\phantom{00}}n+\boxed{\phantom{00}}\right)$ 個ある。

（上智大）

## チェック・チェック

### 格子点の個数

**328** (1) $x=$ 一定（もしくは $y=$ 一定）として，与えられた領域内の**線分上の格子点**を順次数えていきます。

(2) 境界の直線が $x+2y=20$ のときは，$x=k$（一定）とすると，$y=10-\dfrac{k}{2}$ であり，$k=$ 偶数，奇数 の場合分けが生じます。

$y=k$（一定）とすると，$x=20-2k$ ですから，格子点 $(x,\ k)$ の個数は数えやすくなります。

**329** (1) 平面上の格子点の個数を数えるには，うまく直線を選び，線分上の格子点の個数を数え，総和を求めるのがポイントです。

たとえば，$y$ 軸に平行な直線 $x=k$ ($k$：整数，$0 \leqq k \leqq n$) を選びます。$x$ 軸に平行な直線 $y=l$ ($l$：整数，$0 \leqq l \leqq n$) でもよいです。

(2) 空間内の格子点の個数を数えるときは，うまく平面を選び，**平面上の格子点**の個数を数え，その総和を求めるのがポイントです。

本問では，(1) が利用できるように，$xy$ 平面に平行な平面 $z=l$ ($l$：整数，$0 \leqq l \leqq n$) 上の格子点を数えるのがよいでしょう。

# 解答・解説

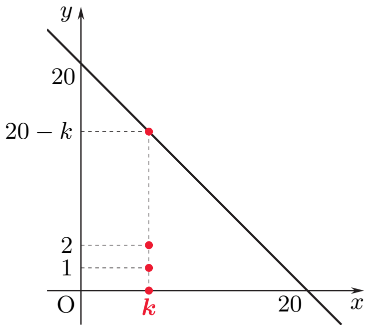
## 格子点の個数

**328** (1) $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 20$ とするとき，**線分 $x=k,\ 0 \leqq y \leqq 20-k$ 上の格子点**は

$$20-k+1=21-k\ (個)$$

ある。よって，与えられた領域内の格子点は

$$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\frac{21}{2}\{21+(21-20)\}$$
$$=\underline{\mathbf{231}\ (個)}$$




別解 条件式は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 20-(x+y) \geqq 0$$

そこで，$z=20-(x+y)$ とおくと

$$x+y+z=20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよい。これは球 20 個と仕切り棒 2 本の並べ方の総数と一致するから

(例：○|○○|○…○ ならば $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 17)$)

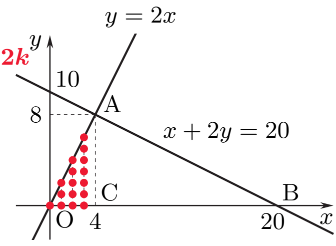
$${}_3\mathrm{H}_{20}={}_{22}\mathrm{C}_{20}={}_{22}\mathrm{C}_2=231\ (個)$$

**【参考】** $n$ 種類のものの中から重複を許して $r$ 個のものをとる取り方の総数は ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である。これは重複組合せとよばれる。

(2) $\mathrm{A}(4,\ 8)$，$\mathrm{B}(20,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 0)$ とおく。

△OAC の辺 AC を除く領域の格子点の個数は，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ とするとき，**線分 $x=k,\ 0 \leqq y \leqq 2k$ 上**に $2k+1$ 個あるので

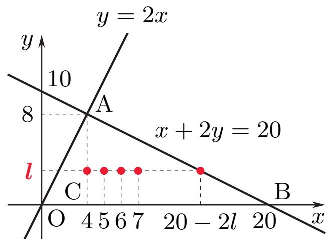
$$1+3+5+7=16\ (個)$$




　次に △ABC の周および内部にある格子点の数を数える。$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ として，**線分 $y=l,\ 4 \leqq x \leqq 20-2l$ 上**の格子点の個数は

$$(20-2l)-3=17-2l\ (個)$$

$$\therefore\quad \sum_{l=0}^{8}(17-2l)=\frac{9}{2}\{17+(17-16)\}$$
$$=81\ (個)$$



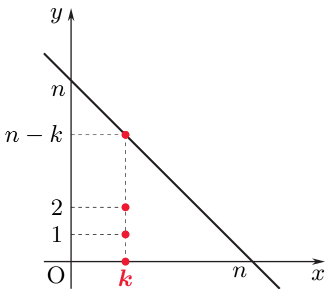

以上より

$$16+81=\underline{\mathbf{97}\ (個)}$$

**329** (1) **線分**

**$x=k,\quad 0 \leqq y \leqq n-k\ (0 \leqq k \leqq n)$**

**上**の格子点は，$n-k+1$ 個あるから，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

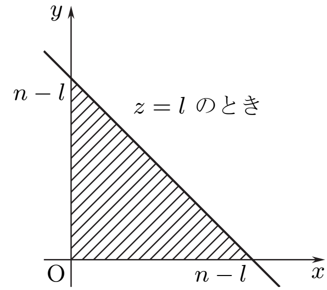



$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)$$
$$=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(n^2+3n+2)}}$$

(2) $z=l\ (0 \leqq l \leqq n)$ のとき

$$x+y \leqq n-l,\quad x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

であるから，**平面 $z=l$ 上**の格子点の個数は (1) より




$$\frac{1}{2}(n-l+1)(n-l+2)\ (\text{個})$$

よって，求める整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{2}(n-l+1)(n-l+2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(n+1)(n+2)+n(n+1)+\cdots$$
$$\cdots+3\cdot4+2\cdot3+1\cdot2\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}j(j+1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{6}\{(2n+3)+3\}=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)}}$$

別解 (1) 条件式は $n-x-y \geqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

そこで，$z=n-x-y$ とおくと

$$x+y+z=n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めればよいから

$$_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

(2) も同様に，$w=n-x-y-z$ とおくと

$$x+y+z+w=n,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ w \geqq 0$$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ の個数を求めればよいから

$$_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)$$