

問題

2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ への変形

340 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の条件をみたす。

$$a_1 = \frac{1}{6} \text{ および, } a_{n+1} = \frac{a_n}{6a_n + 7}, b_n = \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項 a_n , b_n を求めよ。 (岩手大 改)

341 数列 $\{b_n\}$ が $b_1 = 1$ と漸化式

$$b_{n+1} = 5\sqrt{b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義されているとき、一般項 b_n を n の式で表せ。 (関西大)

チェック・チェック

2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ への変形

340 分数型の漸化式です。

$$a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q} \quad (p, q, r \text{ は定数})$$

のときは、両辺の**逆数をとる**のが定石です。一般型については 302 ページの【**分数型漸化式**】を参照して下さい。

341 積 $b_{n+1}b_n$ や指数型 b_n^2 などを含む漸化式を a_n の 1 次式に直す手段のひとつとして、**対数を考えて**みましょう。

この問題は $\sqrt{b_n} = b_n^{\frac{1}{2}}$ を含んでいますから、両辺に \log_a をつけてみて下さい。底 a については問題に応じて、うまく選んで下さい。

解答・解説

2項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ への変形

340 (1) $a_1 = \frac{1}{6} > 0$ であることと与えられた漸化式の形から、明らかに $a_n > 0$ である。そこで、両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{6a_n + 7}{a_n} = 7 \cdot \frac{1}{a_n} + 6$$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ であるから

$$\underline{b_{n+1} = 7b_n + 6}$$

(2) (1) の式は ($\beta = 7\beta + 6$ をみたす β は $\beta = -1$ であるから)

$$b_{n+1} + 1 = 7(b_n + 1)$$

と変形できる。数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 7 の等比数列で、初項は

$$b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 6 + 1 = 7$$

したがって

$$b_n + 1 = 7 \cdot 7^{n-1} \quad \therefore \underline{b_n = 7^n - 1}$$

であるから

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{7^n - 1}$$

341 $b_{n+1} = 5\sqrt{b_n}$ (> 0) より、底 5 の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_5 b_{n+1} &= \log_5 5\sqrt{b_n} = \log_5 5 + \log_5 b_n^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \log_5 b_n \end{aligned}$$

$a_n = \log_5 b_n$ とおくと

$$a_1 = \log_5 b_1 = \log_5 1 = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \text{ をみたす } \alpha \text{ は } \alpha = 2\right)$$

これは、 $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ と変形できる。

よって、数列 $\{a_n - 2\}$ は、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であり、初項 $a_1 - 2 = -2$ である。

$$a_n - 2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} = 2 - 2^{2-n}$$

したがって

$$\log_5 b_n = 2 - 2^{2-n}$$

$$\therefore \underline{b_n = 5^{2-2^{2-n}}}$$