問題

連立漸化式

348 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について,

$$a_1=1,\quad b_1=2,\quad \begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n \\ b_{n+1}=2a_n+b_n \end{cases},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

の関係がある。

(1) a_n+b_n を n の式で表すと, $\boxed{}$ である。

(2) a_n を n の式で表すと, $\boxed{}$ である。　（東北学院大）

349 次の式をみたす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=2,\quad b_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+3b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

次の問いに答えよ。

(1) $c_n=a_n+kb_n$ とする。数列 $\{c_n\}$ が等比数列となる正の数 k を求めよ。

(2) (1) で求めた k について, $d_n=a_n-kb_n$ とする。数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 一般項 a_n, b_n を求めよ。　（大阪教育大　改）

チェック・チェック

連立漸化式

次の連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

については, ① $-\alpha\times$ ② をつくり

$$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$$

となる α, β を見つければ, $\{a_n-\alpha b_n\}$ は公比 β の等比数列となります。実は, この α は x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解となっています。

とくに, **348** のように

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \end{cases}$$

の形で表される $r=q$, $s=p$ の場合は頻出で, $\alpha=\pm1$ です。

349 $k=\dfrac{2k+3}{k+2}$ を解くと $k=\pm\sqrt{3}$ です。

解答・解説

連立漸化式

348 (1) $a_{n+1}+b_{n+1}=(a_n+2b_n)+(2a_n+b_n)=3(a_n+b_n)$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は $a_1+b_1=1+2=3$ だから

$$a_n+b_n=3\cdot 3^{n-1}=\underline{\mathbf{3^n}}\quad \cdots\cdots ①$$

(2) $a_{n+1}-b_{n+1}=(a_n+2b_n)-(2a_n+b_n)=-(a_n-b_n)$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 -1 の等比数列で，初項は $a_1-b_1=1-2=-1$ だから

$$a_n-b_n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\quad \cdots\cdots ②$$

① + ② より

$$2a_n=3^n+(-1)^n\qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}}}$$

349 (1) $c_{n+1}=a_{n+1}+kb_{n+1}=(2a_n+3b_n)+k(a_n+2b_n)$ より

$$c_{n+1}=(2+k)a_n+(3+2k)b_n\quad \cdots\cdots ①$$

$\{c_n\}$ が公比 r の等比数列のとき，$c_{n+1}=rc_n$ より

$$c_{n+1}=ra_n+rkb_n\quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$2+k=r\quad \cdots\cdots ③\quad かつ\quad 3+2k=rk\quad \cdots\cdots ④$$

となればよい。③を④に代入して

$$3+2k=(2+k)k\qquad k^2=3\qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{k=\sqrt{3}}}\quad (\because\ \ k>0)$$

(2) $k=\sqrt{3}$ を③へ代入すると，$r=2+\sqrt{3}$ となるから，②より数列 $\{c_n\}$ すなわち $\{a_n+\sqrt{3}b_n\}$ は公比 $2+\sqrt{3}$ の等比数列で，初項は

$$c_1=a_1+\sqrt{3}b_1=2+\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad c_n=(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^{n-1}=\underline{\boldsymbol{(2+\sqrt{3})^n}}\quad \cdots\cdots ⑤$$

次に，$d_n=a_n-\sqrt{3}b_n$ のときは，(1) の $k=-\sqrt{3}$ のときを考えればよいので，数列 $\{d_n\}$ すなわち $\{a_n-\sqrt{3}b_n\}$ は公比 $2-\sqrt{3}$ の等比数列で，初項は

$$d_1=a_1-\sqrt{3}b_1=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad d_n=(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})^{n-1}=\underline{\boldsymbol{(2-\sqrt{3})^n}}\quad \cdots\cdots ⑥$$

(3) ⑤より　$a_n+\sqrt{3}b_n=(2+\sqrt{3})^n\quad \cdots\cdots ⑦$

⑥より　$a_n-\sqrt{3}b_n=(2-\sqrt{3})^n\quad \cdots\cdots ⑧$

$\dfrac{⑦+⑧}{2}$，$\dfrac{⑦-⑧}{2\sqrt{3}}$ より

$$\underline{\boldsymbol{a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}}},\qquad \underline{\boldsymbol{b_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}}}$$