問題

分数型漸化式

350 $a_1=0,\ a_{n+1}=-\dfrac{2}{a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\dfrac{1}{1+a_n}$ とおいて，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) a_n を n を用いて表せ。　（大阪府立大）

351 $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，$a_n \fallingdotseq 2$ であることを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　（名城大）

チェック・チェック

分数型漸化式

1 次分数型の漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}$$

は，x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解の 1 つ α を用いると，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ についての簡単な漸化式に変形できます。

350 $x=-\dfrac{2}{x+3}$ を解くと $x=-1,\ -2$ です。

351 $x=\dfrac{3x-4}{x-1}$ を解くと $x=2$（重解）です。

解答・解説

分数型漸化式

350 (1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{a_n+3}}=\dfrac{a_n+3}{a_n+1}=\dfrac{2+(a_n+1)}{a_n+1}$

$$=\frac{2}{a_n+1}+1=2b_n+1$$

$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+1}}$

(2) $b_{n+1}=2b_n+1$ は（$\alpha=2\alpha+1$ をみたす α は $\alpha=-1$）

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

と変形できるので，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列である。初項は

$$b_1+1=\frac{1}{1+a_1}+1=2\qquad\therefore\quad b_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

したがって，$b_n=2^n-1$ であるから

$$1+a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^n-1}\qquad\therefore\quad a_n=\frac{1}{2^n-1}-1=\underline{\boldsymbol{\frac{2-2^n}{2^n-1}}}$$

351 (1) (I) $n=1$ のとき，$a_1=4\fallingdotseq 2$

(II) $a_n\fallingdotseq 2$ と仮定すると

$$a_{n+1}-2=\frac{3a_n-4}{a_n-1}-2=\frac{a_n-2}{a_n-1}\fallingdotseq 0\qquad\cdots\cdots①$$

$\therefore\quad a_{n+1}\fallingdotseq 2$

以上 (I)，(II) より，すべての n に対して，$a_n\fallingdotseq 2$ である。　（証終）

(2) ①より

$$a_{n+1}-2=\frac{a_n-2}{a_n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n-1}{a_n-2}=\frac{(a_n-2)+1}{a_n-2}=1+\frac{1}{a_n-2}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+1$$

数列 $\{b_n\}$ は公差 1 の等差数列であり，初項は $b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot1=\underline{\boldsymbol{n-\frac{1}{2}}}$$

(3) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ より

$$a_n-2=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n-\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{2n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{2n-1}+2=\underline{\boldsymbol{\frac{4n}{2n-1}}}$$