問題

分点公式

363 台形 ABCD において 2 つのベクトル $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ が $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ をみたしているとする。このとき 2 つの線分 AC と BD の交点を E とするとベクトル $\overrightarrow{AE}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて

$$\overrightarrow{AE}=\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{AD}$$

と表せる。また点 E を通り辺 AD に平行な直線と線分 AB, CD との交点をそれぞれ F, G とするとベクトル $\overrightarrow{AF}$ と $\overrightarrow{AG}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて

$$\overrightarrow{AF}=\boxed{}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AG}=\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{AD}$$

と表せる。　（摂南大）

364 O を原点とする平面上に三角形 ABC がある。AB，AC の中点の座標がそれぞれ $(-1,\ 4)$, $(4,\ 4)$ であり，重心の座標が $(2,\ 3)$ である。このとき，$\overrightarrow{OA}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。　（神戸薬科大）

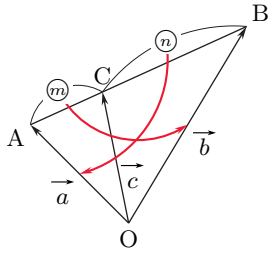
チェック・チェック

分点公式

363 線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の位置ベクトルは

$$\vec{c}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

です。$\vec{a}$ に m をかけるのか n をかけるのか迷う人もいますね。右図のように**タスキがけ**にかけると覚えておくとよいでしょう。



364 △ABC の重心とは

3 本の中線の交点

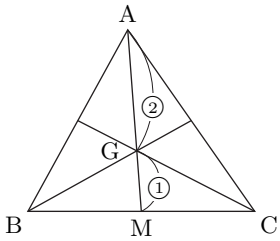
であり，BC の中点を M とすると

重心 G は AM を 2 : 1 に内分

する点なので

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

です。



解答・解説

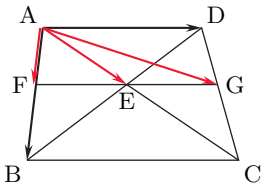
分点公式

363 右図において，$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ より AD // BC であり

$$BE:ED=BC:AD=4:3$$

となるので

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+3}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}}}$$



すると，F, G のとり方から AF : FB = 3 : 4 だから

$$\overrightarrow{AF}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}}}$$

同じく，DG : GC = 3 : 4 となるので

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}}{3+4}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}\right)+\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{7}\overrightarrow{AD}}}$$

364 右図のように，重心を G とし，与えられた中点 $(-1,\ 4)$，$(4,\ 4)$ をそれぞれ M, N とすると，重心の性質より

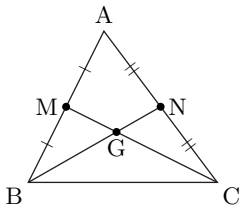
G は線分 BN を 2 : 1 に内分する点

すなわち，B は線分 GN を 2 : 3 に外分する点

であるから

$$\overrightarrow{OB}=\frac{3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{ON}}{3-2}=3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{ON}$$

$$=3(2,\ 3)-2(4,\ 4)=\underline{\boldsymbol{(-2,\ 1)}}$$



同様にして，C は線分 GM を 2 : 3 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OM}}{3-2}=3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OM}=3(2,\ 3)-2(-1,\ 4)=\underline{\boldsymbol{(8,\ 1)}}$$

また，$\boldsymbol{\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}}$ より

$$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=3(2,\ 3)-(-2,\ 1)-(8,\ 1)=\underline{\boldsymbol{(0,\ 7)}}$$

別解 $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}$，$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}=(-2,\ 8)\\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{ON}=(8,\ 8)\\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(6,\ 9)\end{cases}$$

より，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を求めてもよい。