問題

面積比

365 △ABC と同一平面上に点 P があり

$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$$

をみたすとき，△ABP，△BCP，△CAP の面積の比は $\boxed{}$: $\boxed{}$: $\boxed{}$ となる。　(摂南大)

366 △ABC とその内部の点 P があり，△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を 1 : 2 : 3 とする。点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ とするとき，点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を使って表せ。　(福島大)

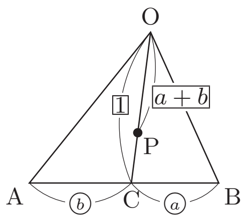
チェック・チェック

面積比

365 点の位置を知るには**分点公式が使える形に式を変形**します。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= (a+b) \times \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

線分 AB を $b : a$ に内分する点を C とすると P は右図の位置にあります。



366 これは **365** の逆のタイプです。面積比から点 P の位置を探ります。

解答・解説

面積比

365 $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ の**始点を A** に直すと

$$-3\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+5(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{0}$$

$$12\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$$

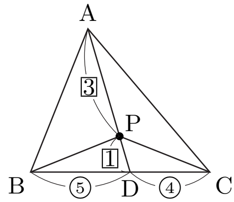
$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}=\frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC})=\frac{9}{12}\times\frac{4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}}{5+4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

ただし，点 D は辺 BC を 5 : 4 に内分する点である。これより，P は右下図の位置にある。**△ABC の面積を S とおく**と

$$\triangle ABP=\frac{3}{4}\triangle ABD=\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\triangle ABC=\frac{5}{12}S$$

$$\triangle BCP=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{3}{12}S$$

$$\triangle CAP=\frac{3}{4}\triangle ACD=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\triangle ABC=\frac{4}{12}S$$



よって　　△ABP : △BCP : △CAP = **5 : 3 : 4**

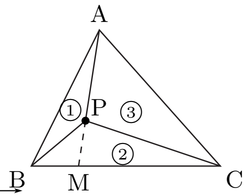
366 AP の延長と辺 BC との交点を M とすると △PAB : △PBC : △PCA = 1 : 2 : 3 より

BM : MC = △PAB : △PCA = 1 : 3

また

$$\triangle PBC:\triangle ABC=2:(1+2+3)=1:3$$

$\therefore$　PM : AM = 1 : 3 すなわち AP : AM = 2 : 3



よって　　$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}$

P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ とすれば

$$6(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=3(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})\qquad\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{p}=\frac{2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{6}}$$