問題

直線の方程式

369 xy 平面上で点 $(1,\ -1)$ を通り，方向ベクトルが $(4,\ -3)$ である直線と原点との距離は $\boxed{}$ である。（東邦大）

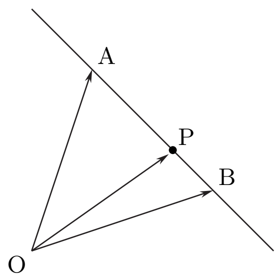
370 △ABC の重心 G を通る直線が辺 AB，辺 AC と交わっている。この直線と辺 AB との交点を P，辺 AC との交点を Q とおき，定数 k，l を $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ により定める。このとき，$\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{l} = 3$ が成り立つことを示せ。（三重大　改）

チェック・チェック

直線の方程式

P が直線 AB 上の点である条件は，次の (i)〜(iv) のいずれかをみたすことです。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(iii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(iv) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\alpha + \beta = 1$



どの形でも使えるようにしておきましょう。

369 (ii) を使いましょう。

370 (iv) を使ってみましょう。

解答・解説

直線の方程式

369 A(1, −1) とし，直線上の点を P(x, y) とすると，直線の方向ベクトルが (4, −3) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(4,\ -3) = (1,\ -1) + (4k,\ -3k)$$
$$= (1 + 4k,\ -1 - 3k)$$

したがって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = (1 + 4k)^2 + (-1 - 3k)^2 = 25k^2 + 14k + 2$$
$$= 25\left(k + \frac{7}{25}\right)^2 + \frac{1}{25}$$

原点 O と直線との距離は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値なので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ である。

別解 直線と原点 O との距離は，方向ベクトル $\vec{l}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とが垂直となるときの P と O の距離である。ここで

$$\vec{l} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (4,\ -3)\cdot(1 + 4k,\ -1 - 3k) = 4(1 + 4k) - 3(-1 - 3k)$$
$$= 7 + 25k$$

$\vec{l} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ より，$k = -\dfrac{7}{25}$ だから

$$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{25},\ -\frac{4}{25}\right) \qquad \therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \frac{1}{25}\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{5}$$

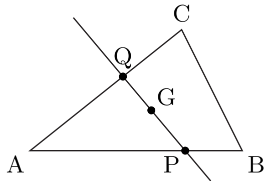
あるいは，点 (1, −1) を通り，方向ベクトルが (4, −3) の直線は

$$y = -\frac{3}{4}(x - 1) - 1 \text{ すなわち } 3x + 4y + 1 = 0$$

点と直線の距離の公式より，求める距離は

$$\frac{|3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$$

370 G は △ABC の重心なので



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{l}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

G は直線 PQ 上にあるから

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{l} = 1 \qquad \therefore\quad \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 3$$

（証終）