問題

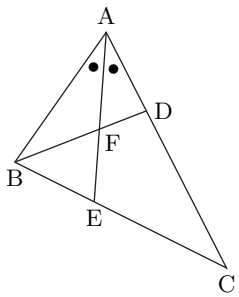
角の 2 等分線，内心

371 △ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を P，
また，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とすると，ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=k\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$$

と表すことができる。実数 k の値を求めよ。（防衛医科大）

372 三角形 ABC は AB : AC = 3 : 5 をみたし，点 D は辺 AC を 1 : 2 に内分し，線分 AE は ∠BAC の 2 等分線であるとする。また，線分 BD と線分 AE との交点を F とする。$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ としたとき，$\overrightarrow{AF}$ および $\overrightarrow{BF}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。（日本大　改）



373 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a，b，c とする。三角形 ABC の内接円の中心を I とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ および a，b，c を用いて表せ。（東京学芸大）

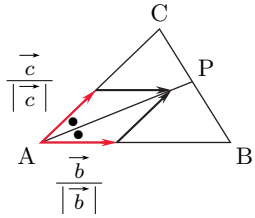
チェック・チェック

角の 2 等分線，内心

371 **ひし形の対角線は角を 2 等分**します。$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ は $\vec{b}$，$\vec{c}$ と同じ向きの単位ベクトルであり

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

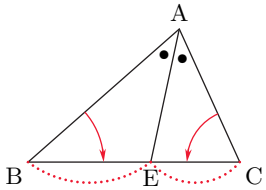
はひし形の対角線を表すベクトルです。



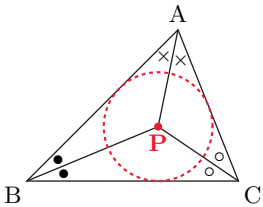
372 AE が ∠BAC の 2 等分線であるとき

BE : EC = AB : AC

であることは覚えておきましょう。



373 **内心**（内接円の中心）とは，三角形の 3 つの内角の 2 等分線の交点です。



解答・解説

角の 2 等分線，内心

371 $\overrightarrow{p}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}+\dfrac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}\right)$ であり，P は BC 上の点でもあるから

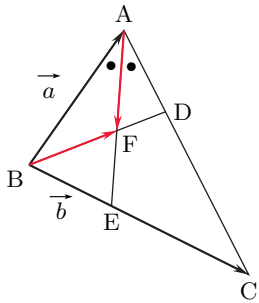
$$\frac{k}{|\overrightarrow{b}|}+\frac{k}{|\overrightarrow{c}|}=1 \qquad \therefore\ \underline{k=\frac{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|}}$$

【補足】上の結果から，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{|\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|}\overrightarrow{b}+\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|}\overrightarrow{c}$ と表せる。

これより $\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=|\overrightarrow{b}|:|\overrightarrow{c}|$ とわかる。

372 AE は ∠A の 2 等分線であるから

BE : EC = AB : AC $=3:5$



F は線分 AE 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1-t)\overrightarrow{a}+\frac{3}{8}t\overrightarrow{b}$$

また，F は線分 BD 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=k\overrightarrow{\mathrm{BD}}=k\cdot\frac{2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{1+2}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{b}$$

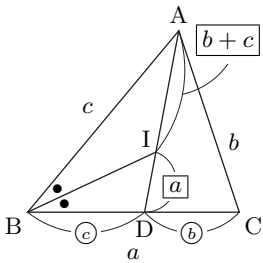
$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ より

$$\begin{cases}1-t=\dfrac{2}{3}k\\[2mm] \dfrac{3}{8}t=\dfrac{1}{3}k\end{cases} \qquad \therefore\ k=\frac{9}{14},\ t=\frac{4}{7}$$

したがって

$$\underline{\overrightarrow{\mathbf{BF}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{a}+\frac{3}{14}\overrightarrow{b}} \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\underline{-\frac{4}{7}\overrightarrow{a}+\frac{3}{14}\overrightarrow{b}}$$

373 **∠A の 2 等分線 AI** と BC の交点を D とすると，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=c:b$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$$

である。さらに △ABD に着目して，**BI が ∠B の 2 等分線**であるから

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}$$
$$=c:\left(\frac{c}{b+c}\times a\right)=(b+c):a$$

よって，I は AD を $(b+c):a$ に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{a+(b+c)}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b+c}{a+b+c}\times\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}=\underline{\frac{b\overrightarrow{\mathbf{AB}}+c\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{a+b+c}}$$